1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$$

$k^2 - 2k - 8 < 0$, $(k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 6x + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 2x + k$ 가 만나기 위한 k 의 최솟값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

두 그래프가 만나려면 연립 방정식의 판별식이
0 보다 크거나 같아야 한다.

$\Rightarrow 2x + k = x^2 - 6x + 12$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 - k = 0$

$\dfrac{D}{4} = 4^2 - 12 + k \geq 0$

$\Rightarrow k \geq -4$

$\therefore$ 최솟값 : -4

3. 이차함수 $y = 2x^2 - 3x + 1$의 그래프와 직선 $y = ax + b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = ax + b$, 즉 $2x^2 - (3+a)x + 1 - b = 0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1 + 5 = \dfrac{3+a}{2}$, $1 \times 5 = \dfrac{1-b}{2}$

$\therefore a = 9,\ b = -9$

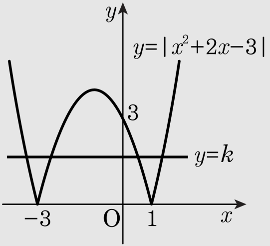
$\therefore ab = -81$

4. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

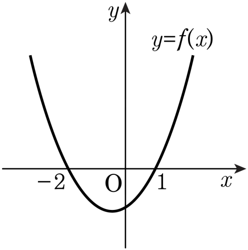
① $k \geq 3$ ② $k > 4$ ③ $3 \leq k < 4$
④ $0 < k < 3$ ⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0<k<3$



5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

6. 직선 $y = mx - 4$가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프에 접하도록 하는 양수 m의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$

$m^2 - 8 = 0,\ m^2 = 8$

$\therefore m = 2\sqrt{2} (\because m > 0)$

7. 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

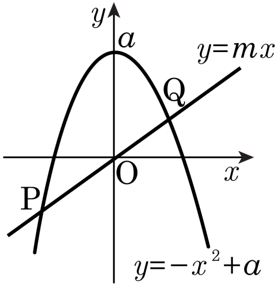
직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,
즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$D = 1 - 4k + 8 = 0$

$\therefore k = \dfrac{9}{4}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \dfrac{9}{4}$

$\therefore -4x + 4y = 9$

8. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a, m은 유리수)



▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$$

$$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$$

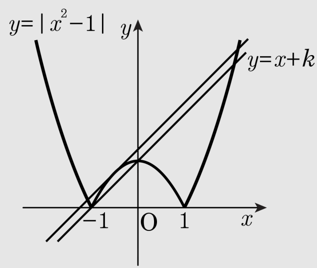
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

9. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1 < k < \frac{5}{4}$　② $1 \le k \le \frac{5}{4}$　③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
④ $k < 1,\ k > \frac{5}{4}$　⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여
분리하면
$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=$
$x+k$
이 두 함수가 4개의 교점을 가지
려면
다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가
두 점에서 만나야하므로
$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0$　　$\therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야
하므로

$0<-1+k$　　$\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

10. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5　② $5\sqrt{2}$　③ 7　④ $7\sqrt{2}$　⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$