

1. 모든 실수 x 에 대하여 다음 분수식 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ 가 항상 성립하도록 상수 a, b, c 의 값을 정할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$\therefore 1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$$

이것이 x 에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $1 = a$

$x = -2$ 를 대입하면 $1 = -c$

즉, $c = -1$

$x = 0$ 을 대입하면 $1 = 4a + 2b + c$

$a = 1, c = -1$ 이므로 $1 = 4 + 2b - 1$

$\therefore b = -1$

$\therefore a + b + c = 1 - 1 - 1 = -1$

2. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{13 \times 14} = \frac{a}{14}$ 에서 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} \text{준식} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{14} = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \\ \therefore a &= 13 \end{aligned}$$

3. $\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

4. $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{a-b}{a+b}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$

② $-\frac{1}{5}$

③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2}, \quad 3a = 2b$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}b$$

$$(\text{준 식}) = \frac{\frac{2}{3}b - b}{\frac{2}{3}b + b} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$$

5. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{5x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{7}{5}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ 1

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 에서 정리하면

$$y = \frac{5}{3}z$$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 에서 정리하면

$$x = \frac{1}{3}z$$

$$\therefore x : y : z = \frac{1}{3}z : \frac{5}{3}z : z$$

$$= 1 : 5 : 3$$

$x = 1$, $y = 5$, $z = 3$ 을 대입하면

$$(\text{준식}) = \frac{5 - 5 + 25}{1 + 25 + 9} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

6. $a : b = c : d$ 일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \\ \textcircled{3} \quad & \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \\ \textcircled{5} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \frac{a+d}{a-d} = \frac{b+c}{b-c} \\ \textcircled{4} \quad & \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 하면

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ 에서}$$

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d} \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4} \div \textcircled{3}$ 하면

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 에서 가비의 리를 이용하면}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

7. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$$\therefore c = -7$$

따라서 $f(x) = \frac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

8. 다음 중 함수 $y = \frac{2x+8}{x+3}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?
- ① 제1사분면

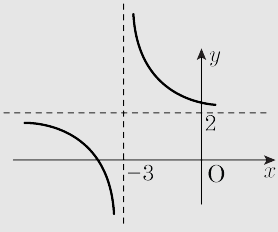
② 제2사분면

③ 제3사분면

④ 제4사분면

⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$$y = \frac{2x+8}{x+3}$$
$$y = \frac{2(x+3)+2}{x+3}$$
$$y = \frac{2}{x+3} + 2$$


따라서 제4사분면을 지나지 않는다.

9. $x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$ 일 때 $x^2 - 8x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}} \\&= \sqrt{10 + 8\sqrt{(2+1) + 2\sqrt{2} \cdot 1}} \\&= \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \\&= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{(16+2) + 2\sqrt{16 \cdot 2}} \\&= \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2} \\\therefore x - 4 &= \sqrt{2} \\\text{양변을 제곱하면 } (x-4)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\x^2 - 8x + 16 &= 2 \\\therefore x^2 - 8x &= -14\end{aligned}$$

10. 함수 $y = -\sqrt{6-3x} + a$ 의 그래프가 제 1, 2, 3 사분면을 지나도록 하는 정수 a 의 최솟값은?

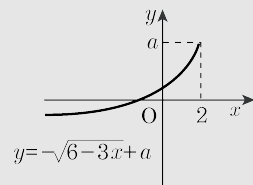
① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$y = -\sqrt{6-3x} + a = -\sqrt{-3(x-2)} + a$$

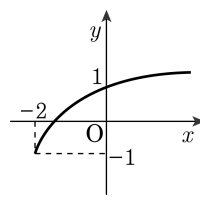
주어진 함수는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 이 함수의 그래프가 제 1, 2, 3 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y > 0$ 이어야 한다.



$-\sqrt{6} + a > 0$ 이므로 $a > \sqrt{6}$
따라서 정수 a 의 최솟값은 3 이다.

11. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



- ① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
 ③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2}, 0)$
 ⑤ $(-\sqrt{3}, 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프는

함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로

c 만큼 평행 이동시킨 것이므로

$$b = 2, c = -1$$

$$\therefore y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$$

한편, 이 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a\sqrt{0+2} - 1$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$ 의 그래프와

x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

12. $8 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1} + 3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$-1 = -\sqrt{a+1} + 3 \quad \therefore a = 15$$

$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$b = -\sqrt{8+1} + 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 15 + 0 = 15$$

13. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합을 구하면?

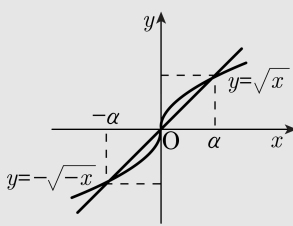
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는

원점에 대하여 대칭이므로

다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0이다.



14. 함수 $y = \sqrt{x-3}$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 3$

② $y = \sqrt{x+3}$

③ $y = x^2 - 3$

④ $y = x^2 - 3 \ (x \leq 1)$

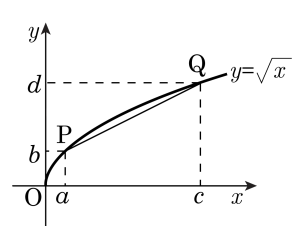
⑤ $y = x^2 + 3 \ (x \geq 0)$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ 의 정의역과 치역은
각각 $x \geq 3, y \geq 0$ 이고 양변을 제곱하면
 $y^2 = x-3, x = y^2 + 3$
 $\therefore y = x^2 + 3 \ (x \geq 0, y \geq 3)$

15. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 에 대하여 $\frac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



해설

두 점 $P(a, b), Q(c, d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = \sqrt{a}, d = \sqrt{c}$$

$$\therefore a = b^2, c = d^2$$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b} \text{ 이고}$$

$$\frac{b+d}{2} = 1 \text{ 에서 } b+d = 2 \text{ 이므로}$$

$$(\therefore \text{ 직선 PQ 의 기울기}) = \frac{1}{2}$$

16. 분수식 $\frac{4x}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1}$ 를 간단히 한 것은?

- ① $\frac{(x+2)^2}{x^2-1}$ ② $\frac{(x-2)^2}{x^2+1}$ ③ $\frac{x(x+2)^2}{x^2+1}$
④ $\frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$ ⑤ $\frac{x(x+2)^2}{x^2-1}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{4x}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} + \frac{x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{4x^2 + 4x + x^3 - x^2 + x^2}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x^2 + 4x + 4)}{x^2-1} \\ &= \frac{x(x+2)^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

17. $abc = 1$ 일 때,

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \text{ 의 값은?}$$

- ① 1 ② 2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 3

해설

$$abc = 1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a} \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{\frac{1}{a}+b+1} + \frac{c}{ca+c+abc}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{c}{c(a+1+ab)}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{ab+a+1} + \frac{1}{ab+a+1}$$

$$= \frac{ab+a+1}{ab+a+1} = 1$$

18. $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

- ① 0 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ -1

해설

(분모의 합)

$$= (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c$$

i) $a+b+c \neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c-a} &= \frac{b}{c+a-b} = \frac{c}{a+b-c} \\ &= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1\end{aligned}$$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때,

$$b+c = -a, \quad c+a = -b, \quad a+b = -c \text{ 이므로}$$

$$\frac{a}{-a-a} = \frac{b}{-b-b} = \frac{c}{-c-c} = -\frac{1}{2}$$

i), ii) 에서 구하는 값은 1 또는 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\frac{1}{2}$

19. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 3 : 4 이고, 합격자의 수의 비는 5 : 6, 불합격자의 수의 비는 5 : 8이다. 이 대학의 수학과와 경쟁률을 구하면?

① 10 : 3 ② 5 : 3 ③ 4 : 1 ④ 5 : 2 ⑤ 4 : 3

해설

영문과 합격자 수를 5α 라 하면,
수학과 합격자 수는 6α

영문과 불합격자 수를 5β 라 하면,
수학과 합격자 수는 8β

$$\therefore (5\alpha + 5\beta) : (6\alpha + 8\beta) = 3 : 4$$

$$\Rightarrow 18\alpha + 24\beta = 20\alpha + 20\beta$$

$$\therefore \alpha = 2\beta$$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률} = \frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}} = \frac{6\alpha + 8\beta}{6\alpha}$$

$$= \frac{10\alpha}{6\alpha} = \frac{5}{3}$$

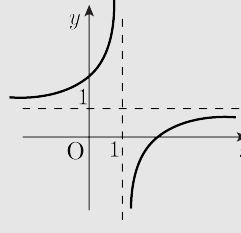
$$\Rightarrow 5 : 3$$

20. 분수함수 $y = \frac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

- ① $\{y \mid -2 \leq y \leq 0\}$ ② $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$
 ③ $\{y \mid -2 \leq y \leq 4\}$ ④ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$
 ⑤ $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

해설

$$y = \frac{x-4}{x-1} = \frac{(x-1)-3}{x-1} = 1 + \frac{-3}{x-1}$$



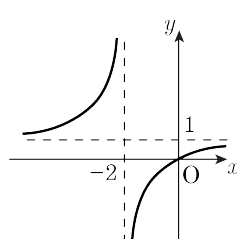
$$x = -2 \text{ 일 때, } y = \frac{-2-4}{-2-1} = 2 \text{ 이고,}$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } y = \frac{-4}{-1} = 4 \text{ 이므로,}$$

치역은 $\{y \mid 2 \leq y \leq 4\}$

21. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$y = 1 + \frac{k}{x+2}$, ($k \neq 0$)가 점 (0, 0)을 지나므로

$$0 = 1 + \frac{k}{0+2}, \quad k = -2$$

$$\text{따라서 } y = 1 + \frac{-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

$$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

22. $0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = \frac{x+2}{x+1}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$$

$$x = 0 \text{ 일 때 최대이므로, } M = \frac{1}{0+1} + 1 = 2$$

$$x = 1 \text{ 일 때 최소이므로, } m = \frac{1}{1+1} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore Mm = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

23. $a + \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, a^5 의 값은?

① $-\sqrt{5}$

② -2

③ -1

④ 1

⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$a^2 + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\therefore a^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1$$

$$a^5 = a^4 \cdot a = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1 \right)^2 \cdot a$$

$$= \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2 - (\sqrt{5}-1)a + 1 \right\} \cdot a$$

$$= \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1 \right) - (\sqrt{5}-1)a + 1 \right\} \cdot a$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - a \right) \cdot a$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - a^2$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}a - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a - 1 \right) = 1$$

24. m 이 유리수일 때, $\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$ 가 유리수가 되도록 하는 m 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} &= \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)} \\ &= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$$\therefore m^2-5m+6=0 \quad \therefore m=2, 3$$

25. 유리함수 $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프와 $y = a$ 의 그래프의 교점이 2개가 되게 하는 a 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a > 1$

③ $0 < a < 1$

④ $-1 < a < 0$

⑤ $-1 < a < 1$

해설

$y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프를
그려보면

$\therefore y = a$ 와 교점이 두 개가 되려면 $-1 < a < 0$

