1. 모든 실수 x에 대하여 다음 분수식 $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$가 항상 성립하도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

주어진 식의 우변을 통분하면

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$= \frac{a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$$

$\therefore\ 1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$

이것이 x에 대한 항등식이어야 하므로

양변에 $x = -1$을 대입하면 $1 = a$

$x = -2$를 대입하면 $1 = -c$

즉, $c = -1$

$x = 0$을 대입하면 $1 = 4a + 2b + c$

$a = 1,\ c = -1$이므로 $1 = 4 + 2b - 1$

$\therefore\ b = -1$

$\therefore\ a + b + c = 1 - 1 - 1 = -1$

2. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{13\times 14}=\frac{a}{14}$ 에서 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

준식 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{14}=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

$\therefore a=13$

3. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x-1}}{1-\dfrac{1}{x+1}}=a+\dfrac{b}{x-1}$ 이라 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$=\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$a+\frac{b}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{ax-a+b}{x-1}$$

$\therefore\ a=1,\ b=2 \Rightarrow a^2+b^2=5$

4. $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{a-b}{a+b}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$, $3a=2b$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}b$

$$(\text{준 식})=\frac{\frac{2}{3}b-b}{\frac{2}{3}b+b}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=-\frac{1}{5}$$

5. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$ 일 때, $\dfrac{5x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{5}{7}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ $\dfrac{3}{7}$ ④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ 1

해설

$2x-y+z=0\cdots$㉠

$x-2y+3z=0\cdots$㉡

㉠ $-$ ㉡ $\times 2$ 에서 정리하면

$y=\dfrac{5}{3}z$

㉠ $\times 2-$ ㉡에서 정리하면

$x=\dfrac{1}{3}z$

$\therefore\ x:y:z=\dfrac{1}{3}z:\dfrac{5}{3}z:z$

$=1:5:3$

$x=1,\ y=5,\ z=3$을 대입하면

(준식)$=\dfrac{5-5+25}{1+25+9}=\dfrac{25}{35}=\dfrac{5}{7}$

6. $a : b = c : d$일 때 다음 등식 중 성립하지 않는 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$　② $\dfrac{a+d}{a-d} = \dfrac{b+c}{b-c}$

③ $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$　④ $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

⑤ $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

해설

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$에서

$\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \cdots$ ㉠

$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \cdots$ ㉡

㉡ ÷ ㉠하면

$\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$에서

$\dfrac{a-c}{c} = \dfrac{b-d}{d} \cdots$ ㉢

$\dfrac{a+c}{c} = \dfrac{b+d}{d} \cdots$ ㉣

㉣ ÷ ㉢하면

$\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$에서 가비의 리를 이용하면

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

$\therefore \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

7. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2,\ y = 4$ 이고, 점 $(3,1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$\therefore\ c = -7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

8. 다음 중 함수 $y=\dfrac{2x+8}{x+3}$의 그래프가 지나지 않는 사분면은?

① 제1사분면 ② 제2사분면

③ 제3사분면 ④ 제4사분면

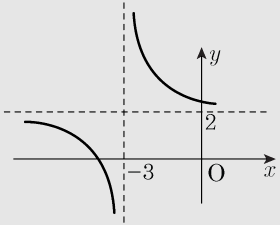
⑤ 모든 사분면을 지난다.

해설

$$y=\frac{2x+8}{x+3}$$

$$y=\frac{2(x+3)+2}{x+3}$$

$$y=\frac{2}{x+3}+2$$



따라서 제4사분면을 지나지 않는다.

9. $x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$일 때 $x^2 - 8x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$$
$$= \sqrt{10 + 8\sqrt{(2+1) + 2\sqrt{2 \cdot 1}}}$$
$$= \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{(16+2) + 2\sqrt{16 \cdot 2}}$$
$$= \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}$$

$\therefore\ x - 4 = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x-4)^2 = (\sqrt{2})^2$

$x^2 - 8x + 16 = 2$

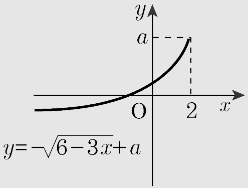
$\therefore\ x^2 - 8x = -14$

10. 함수 $y=-\sqrt{6-3x}+a$ 의 그래프가 제 1 , 2 , 3 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 최솟값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

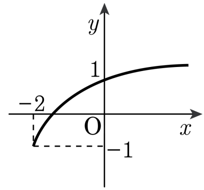
해설

$y=-\sqrt{6-3x}+a=-\sqrt{-3(x-2)}+a$
주어진 함수는 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 2 , 3 사분면을 지나려면 $x=0$ 일 때, $y>0$ 이어야 한다.



$-\sqrt{6}+a>0$ 이므로 $a>\sqrt{6}$
따라서 정수 a의 최솟값은 3이다.

11. 함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$

③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$　④ $(-\sqrt{2},\ 0)$

⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는
함수 $y=a\sqrt{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b=2$, $c=-1$
$\therefore\ y=a\sqrt{x+b}+c=a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1=a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$
따라서, 함수 $y=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0=\sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$

$$\sqrt{x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x=-\frac{3}{2}$$

12. $8 \le x \le a$ 에서 함수 $y = -\sqrt{x+1}+3$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y = -\sqrt{x+1}+3$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = a$ 일 때 최솟값을 가지므로

$-1 = -\sqrt{a+1}+3 \qquad \therefore \ a = 15$

$x = 8$ 일 때 최댓값을 가지므로

$b = -\sqrt{8+1}+3 = 0$

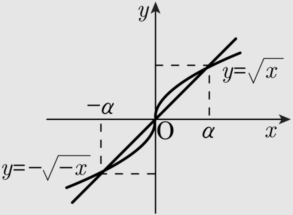
$\therefore \ a+b = 15+0 = 15$

13. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때,
세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0이다.



14. 함수 $y = \sqrt{x-3}$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 3$

② $y = \sqrt{x+3}$

③ $y = x^2 - 3$

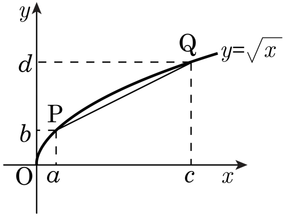
④ $y = x^2 - 3 \ (x \leq 1)$

⑤ $y = x^2 + 3 \ (x \geq 0)$

해설

$y = \sqrt{x-3}$ 의 정의역과 치역은
각각 $x \geq 3,\ y \geq 0$ 이고 양변을 제곱하면
$y^2 = x - 3,\ x = y^2 + 3$
$\therefore\ y = x^2 + 3 \ (x \geq 0,\ y \geq 3)$

15. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $P(a,\ b)$, $Q(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

해설

두 점 $P(a,\ b)$, $Q(c,\ d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$

$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \dfrac{1}{d+b}$ 이고

$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d=2$ 이므로

$(\therefore$ 직선 PQ 의 기울기$)= \dfrac{1}{2}$

16. 분수식 $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2-1}$ 를 간단히 한 것은?

① $\dfrac{(x+2)^2}{x^2-1}$ ② $\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1}$ ③ $\dfrac{x(x+2)^2}{x^2+1}$

④ $\dfrac{x(x-2)^2}{x^2+1}$ ⑤ $\dfrac{x(x+2)^2}{x^2-1}$

해설

$$\frac{4x}{x-1}+\frac{x^2}{x+1}+\frac{x^2}{x^2-1}$$
$$=\frac{4x^2+4x+x^3-x^2+x^2}{x^2-1}$$
$$=\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-1}$$
$$=\frac{x(x^2+4x+4)}{x^2-1}$$
$$=\frac{x(x+2)^2}{x^2-1}$$

17. $abc=1$ 일 때,

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{2}{3}$　　⑤ 3

해설

$abc=1 \Rightarrow bc=\frac{1}{a}$ 이므로

$$(\text{준식})=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{\frac{1}{a}+b+1}+\frac{c}{ca+c+abc}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{c}{c(a+1+ab)}$$

$$=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1}+\frac{1}{ab+a+1}$$

$$=\frac{ab+a+1}{ab+a+1}=1$$

18. $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}$ 의 값들의 합은?

① 0 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ -1

해설

(분모의 합)

$= (b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c$

ⅰ) $a+b+c \neq 0$ 일 때, 가비의 리를 이용하면

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

ⅱ) $a+b+c=0$ 일 때,

$b+c=-a,\ c+a=-b,\ a+b=-c$ 이므로

$$\frac{a}{-a-a}=\frac{b}{-b-b}=\frac{c}{-c-c}=-\frac{1}{2}$$

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 값은 1 또는 $-\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 분수식의 값들의 합은 $\dfrac{1}{2}$

19. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 $3:4$이고, 합격자의 수의 비는 $5:6$, 불합격자의 수의 비는 $5:8$이다. 이 대학의 수학과의 경쟁률을 구하면?

① $10:3$ ② $5:3$ ③ $4:1$ ④ $5:2$ ⑤ $4:3$

해설

영문과 합격자 수를 5α라 하면,
수학과 합격자 수는 6α
영문과 불합격자 수를 5β라 하면,
수학과 합격자 수는 8β

$\therefore\ (5\alpha+5\beta):(6\alpha+8\beta)=3:4$

$\Rightarrow\ 18\alpha+24\beta=20\alpha+20\beta$

$\therefore\ \alpha=2\beta$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률} = \frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}} = \frac{6\alpha+8\beta}{6\alpha} = \frac{10\alpha}{6\alpha} = \frac{5}{3}$$

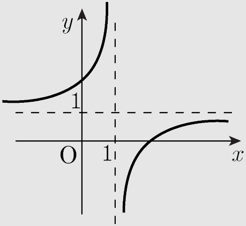
$\Rightarrow\ 5:3$

20. 분수함수 $y=\dfrac{x-4}{x-1}$ 의 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 0\}$ 일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid -2 \le y \le 0\}$
② $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$
③ $\{y \mid -2 \le y \le 4\}$
④ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$
⑤ $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

해설

$$y=\frac{x-4}{x-1}=\frac{(x-1)-3}{x-1}=1+\frac{-3}{x-1}$$

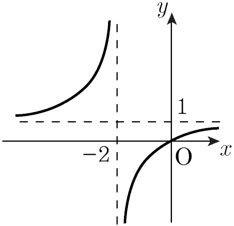


$x=-2$ 일 때, $y=\dfrac{-2-4}{-2-1}=2$ 이고,

$x=0$ 일 때, $y=\dfrac{-4}{-1}=4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

21. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=1+\dfrac{k}{x+2}$, $(k\neq 0)$ 가 점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로

$0=1+\dfrac{k}{0+2}$, $\quad k=-2$

따라서 $y=1+\dfrac{-2}{x+2}=\dfrac{x}{x+2}$

$\therefore\quad a=1,\ b=0,\ c=2$

$\therefore\quad a+b+c=3$

22. $0 \le x \le 1$일 때, 함수 $y = \dfrac{x+2}{x+1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$$

$x = 0$일 때 최대이므로, $M = \dfrac{1}{0+1} + 1 = 2$

$x = 1$일 때 최소이므로, $m = \dfrac{1}{1+1} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$\therefore \quad Mm = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3$

23. $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, a^5 의 값은?

① $-\sqrt{5}$ ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$a^2+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\therefore\ a^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1$$

$$a^5=a^4\cdot a=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)^2\cdot a$$

$$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$$

$$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-a\right)\cdot a$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-a^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)=1$$

24. m이 유리수일 때, $\dfrac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}\cdot\sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

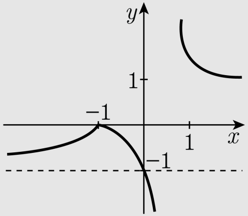
25. 유리함수 $y = \dfrac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프와 $y = a$의 그래프의 교점이 2개가 되게 하는 a값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 1$

④ $-1 < a < 0$ ⑤ $-1 < a < 1$

해설

$y = \dfrac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프를 그려보면



$\therefore y = a$와 교점이 두 개가 되려면 $-1 < a < 0$