1. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ 이므로
$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.
만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times3+1$ $\quad\therefore a^4 = 10$
그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는
자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.
$\therefore f(3) = a^2+3a$, $f(k) = a^4$
$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$
$a^2+3a-10 = 0$, $(a-2)(a+5) = 0$
$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$
$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$
$\therefore k = 5$
$\therefore a+k = 2+5 = 7$

2. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 <u>모두</u> 고르면?

<보기>

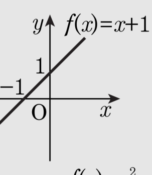
㉠ $f(x) = x + 1$　　㉡ $f(x) = 1$

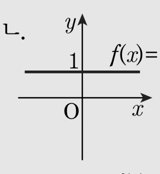
㉢ $f(x) = x^3$　　㉣ $f(x) = |x + 1|$

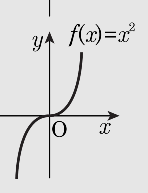
① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉢, ㉣

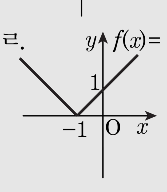
해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

3. 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 21 개

해설

X에서 X로의 함수의 총 개수에서
X에서 X로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
X에서 X로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
X에서 X로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6$(개)
$\therefore\ \ 27 - 6 = 21$(개)

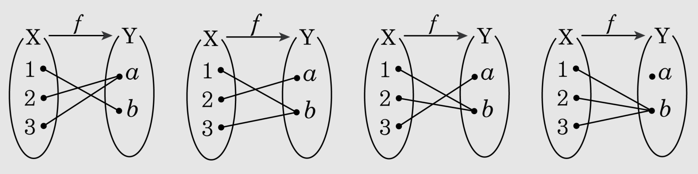
4. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



5. 함수 $f(x) = 2x - a$에 대하여 $(f \circ f)(1) = -5$일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(f(1)) = f(2-a) = 2(2-a) - a = 4 - 3a$

$(f \circ f)(1) = -5$ 에서 $4 - 3a = -5$

$\therefore\ a = 3$

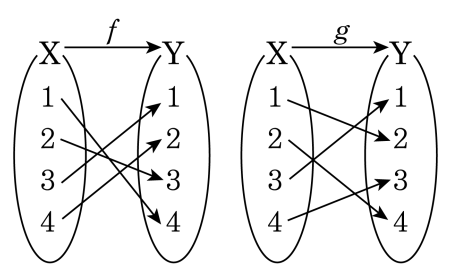
6. 두 함수 $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+k$에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$에서
$-6x+2k+5=-6x-15+k$
$\therefore\ k=-20$

7. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$\therefore\ g \cdot f^{-1}$
$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$
$= h \cdot I = h$
$\therefore\ h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$
$= g(f^{-1}(2))$
$= g(4)(\because\ f^{-1}(2) = 4)$
$\therefore\ g(4) = 3$

8. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

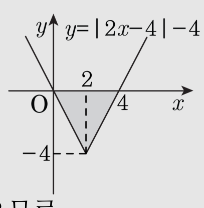
$f=f^{-1}$이므로 $(f\circ f)(x)=x$
$f(x)=a(x+1)-2=ax+a-2\ (a\neq 0)$로 놓으면
$f(f(x))=a(ax+a-2)+a-2=x$
$\therefore a^2x+a^2-a-2=x$
즉, $a^2=1$, $a^2-a-2=0$이므로 $a=-1$
따라서 $f(x)=-x-3$이고
$f(-3)=-(-3)-3=0$이다.

9. 함수 $y = |2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은

$2x-4=0$ 에서 $x=2$

(i) $x<2$ 일 때, $y=-(2x-4)-4=-2x$

(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y=(2x-4)-4=2x-8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

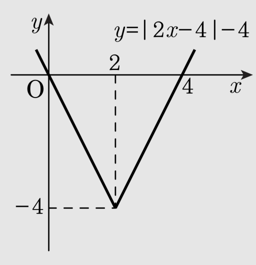
10. 함수 $y = | 2x - 4 | - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

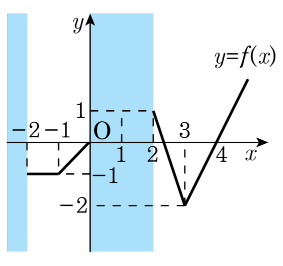
해설

$y = | 2x - 4 | - 4 = | 2(x - 2) | - 4$ 의 그래프는
$y = | 2x |$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

11. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



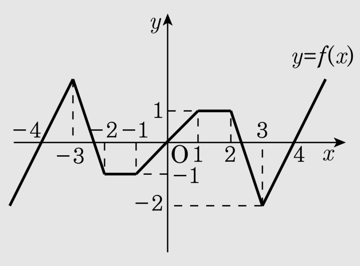
$-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수 즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면 다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

12. $-4 \le x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개　　② 4개　　③ 6개　　④ 8개　　⑤ 10개

해설

i) $-4 \le x < -2$ 일 때,

$-2 \le \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

ii) $-2 \le x < 0$ 일 때,

$-1 \le \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \le x < 2$ 일 때,

$0 \le \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

iv) $2 \le x < 4$ 일 때,

$1 \le \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

13. $x \neq 3$, $x \neq 5$인 모든 실수 x에 대하여 $\frac{3x-19}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5}$가 항상 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② 3 ③ 7 ④ 10 ⑤ 15

해설

우변을 정리하여 좌변의 계수와 비교한다.

$$\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5} = \frac{a(x-5)-b(x-3)}{(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{a(x-5)-b(x-3)}{x^2-8x+15}$$

$3x-19 = (a-b)x + (-5a+3b)$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 5a-3b=19 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=2$$

$\therefore\ a+b=7$

14. $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m의 값에 대하여 $k+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$\dfrac{803}{371}=2+\dfrac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}$

$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}$

$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$

따라서 $k=6$, $m=12$

$\therefore k+m=18$

15. 유리함수 $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-2}$ 에 대하여 이 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 하자. 이 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점의 개수를 구하면?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개
④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은
$y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.
$\Rightarrow x = \dfrac{3x-2}{x-2}$
$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$
$D > 0$ 이므로 교점은 2 개이다.

16. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로
$x = 1$, $y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

17. 집합 $A = \{x | 0 \le x \le 2\}$ 에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 < x \le 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다. 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은?

(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\cdots$)

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

$\vdots$

$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \left\{f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$+ \left\{f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$

$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$

18. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1　② -3　③ 3　④ -6　⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$\begin{aligned} ((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x-3) \\ &= g(f(x-3)) \\ &= g(2(x-3)+1) = g(2x-5) \\ &= (2x-5) - 3 = 2x - 8 \end{aligned}$$

$2x - 8 = ax + b$ 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a + b = -6$

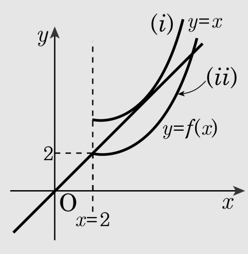
19. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$　　② $k < \frac{25}{4}$　　③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$

④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$　　⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$위에 있다.



따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$가 접할 때,

$x^2 - 4x + k = x,\ x^2 - 5x + k = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D = 5^2 - 4k = 0$

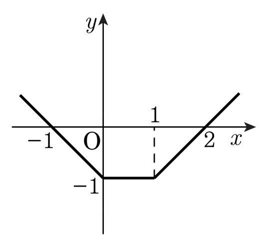
$\therefore \mathrm{k} = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때

$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$이므로 $k = 6$

(i), (ii)에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

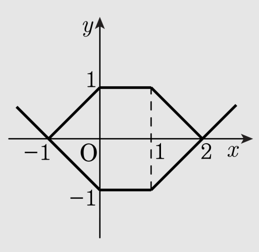
20. 다음 그림은 $y=f(x)$의 그래프이다. 이때, $y=f(x)$와 $y=|f(x)|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서
x축의 윗부분은 그대로 두고 x축의 아랫부분을
x축에 대하여 대칭이동하면 된다.
따라서, 두 그래프로 둘러싸인 부분은 다음 그림과 같으므로 그 넓이는



$2\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=4$

21. $a : b = c : d$일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b+2d \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $c-3d \neq 0$이다.)

보기

ㄱ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ㄴ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d}$

ㄷ $\frac{a+2b}{a-2b} = \frac{c+3d}{c-3d}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \cdots$ 참

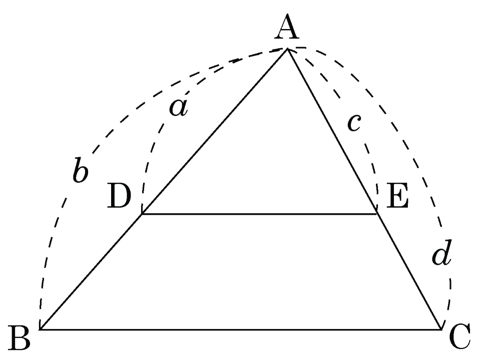
ㄴ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc$, $ad = bc \cdots$ 참

ㄷ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \cdots$ 거짓

22. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b$, $c \neq d$)



① $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b-a}{d-c}$　② $ac - bd = 0$

③ $a(d-c) = c(b-a)$　④ $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{d-c}{c}$

⑤ $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{d}{c}$

해설

$a : b = c : d$이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

23. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 x, 무색생물의 수가 y일 때, $\frac{y}{x+y} \times 100(\%)$로 정의된다. 지난 달 수질 검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 20%이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과 지난달에 비해 유색 생물의 수는 2배, 무색생물의 3배가되었다. 이 번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 %인가?

① 약 14.3%　② 약 15.2%　③ 약 17.1%
④ 약 21.3%　⑤ 약 27.3%

해설

지난달 검사 : $\frac{y}{x+y} \times 100 = 20 \Rightarrow x = 4y$

이번달 검사 : $\frac{3y}{2x+3y} \times 100 = \frac{3y}{11y} \times 100 \fallingdotseq 27.3(\%)$

24. 함수 $f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1}=f_1\circ f_n(n=1,2,3,\cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1　② $-\dfrac{5}{2}$　③ $-\dfrac{4}{3}$　④ 1　⑤ 2

해설

$f_1(x)=\dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$f_2(1)=(f_1\circ f_1)(1)=f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$=\dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1}=-\dfrac{4}{3}$

$f_3(1)=(f_1\circ f_2)(1)=f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1}=1$

$f_4(1)=(f_1\circ f_3)(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4=f_1,\ f_5=f_2,\ f_6=f_3,\cdots$

$\therefore f_{3n+1}=f_1,\ f_{3n+2}=f_2,\ f_{3n}=f_3$

$100=3\times33+1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1)=f_1(1)=-\dfrac{5}{2}$

25. 일차함수 $f(x)$는 실수 x에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x)+f(1-x)=x^2+2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101 ② -100 ③ 0 ④ 100 ⑤ 101

해설

$f(x)=ax+b$ 라 놓으면

$x(ax+b)+a(1-x)+b=x^2+2$

$ax^2+(-a+b)x+(a+b)=x^2+2$

위 식은 x에 대한 항등식이므로

$a=1,\ b=1$

이때 $f(x)=x+1$ 이므로 $f(100)=101$