

1. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x + 1$ 이 일대일 대응일 때, $a + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x + 1$ 에서 $f(1) = 4, f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2 + 3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3 \times 3 + 1 \quad \therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2 + 3a, f(k) = a^4$

$f(3) = a^2 + 3a$ 에서 $a^2 + 3a = 10$

$a^2 + 3a - 10 = 0, (a - 2)(a + 5) = 0$

$\therefore a = 2 (\because a \text{는 자연수})$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k + 1$ 에서 $3k + 1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a + k = 2 + 5 = 7$

2. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = 1$

㉢ $f(x) = x^3$

㉣ $f(x) = |x + 1|$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

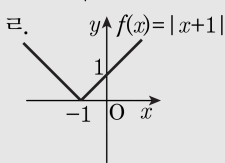
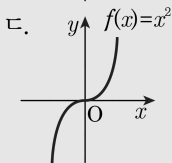
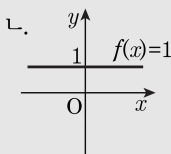
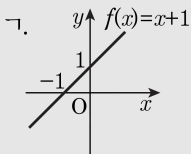
③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉢, ㉣

해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.



따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

3. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21 개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.

X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$

X 에서 X 로의 일대일대응의 개수

: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$

$\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

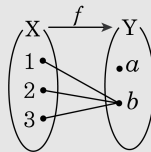
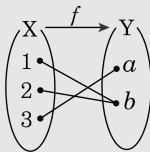
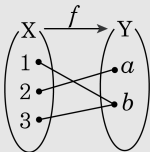
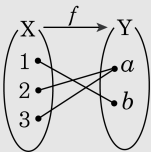
4. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중 $f(1) = b$ 인 것의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(1) = b$ 인 함수 f 는 다음과 같다
따라서, 구하는 함수 f 는 4 개이다.



5. 함수 $f(x) = 2x - a$ 에 대하여 $(f \circ f)(1) = -5$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$f(f(1)) = f(2 - a) = 2(2 - a) - a = 4 - 3a$$

$$(f \circ f)(1) = -5 \text{ 에서 } 4 - 3a = -5$$

$$\therefore a = 3$$

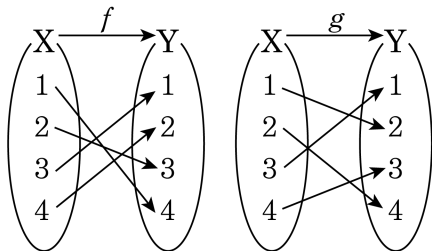
6. 두 함수 $f(x) = 2x+5$, $g(x) = -3x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

- ① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

7. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\therefore g \cdot f^{-1}$$

$$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$$

$$= h \cdot I = h$$

$$\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$$

$$= g(f^{-1}(2))$$

$$= g(4) (\because f^{-1}(2) = 4)$$

$$\therefore g(4) = 3$$

8. 점 $(-1, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$ 의 값은?

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2$ ($a \neq 0$)로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$

$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x - 3$ 이고

$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$ 이다.

9. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

절대값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값은

$$2x - 4 = 0 \text{ 에서 } x = 2$$

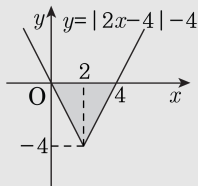
$$(i) \ x < 2 \text{ 일 때, } y = -(2x - 4) - 4 = -2x$$

$$(ii) \ x \geq 2 \text{ 일 때, } y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$\text{구하는 도형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$



10. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는

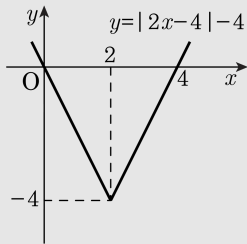
$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

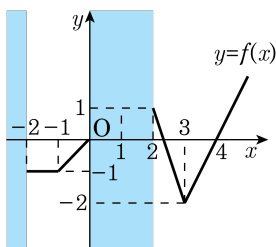
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



11. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$ 에 대한 설명이다. M , N 의 합을 구하여라.



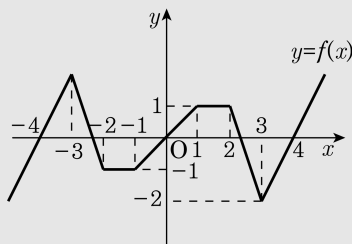
$-4 \leq x \leq -2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 M 이고, $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 N 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수 즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면 다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $M = 2$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $N = 1$ 이다.
 $\therefore M + N = 3$

12. $-4 \leq x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

⑤ 10개

해설

i) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$$-2 \leq \frac{x}{2} < -1 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -2$$

ii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$-1 \leq \frac{x}{2} < 0 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -1$$

iii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$0 \leq \frac{x}{2} < 1 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$$

iv) $2 \leq x < 4$ 일 때,

$$1 \leq \frac{x}{2} < 2 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

13. $x \neq 3, x \neq 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{3x-19}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5}$ 가 항상 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2

② 3

③ 7

④ 10

⑤ 15

해설

우변을 정리하여 좌변의 계수와 비교한다.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5} &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{x^2 - 8x + 15}\end{aligned}$$

$$3x - 19 = (a - b)x + (-5a + 3b)$$

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 5a - 3b = 19 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = 2$$

$$\therefore a + b = 7$$

14. $2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m 의 값에 대하여 $k + m$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$\begin{aligned} \frac{803}{371} &= 2 + \frac{61}{371} = 2 + \frac{1}{\frac{371}{61}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{5}{61}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{61}{5}}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

따라서 $k = 6, m = 12$

$$\therefore k + m = 18$$

15. 유리함수 $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$ 에 대하여 이 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 하자. 이 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점의 개수를 구하면?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 무수히 많다.

해설

$y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 교점은
 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\Rightarrow x = \frac{3x-2}{x-2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2 = 0$$

$D > 0$ 이므로 교점은 2개이다.

16. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

17. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 와 같이 정의한다. 이 때, $f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값은?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, $\dots$)

① 20

② 25

③ 30

④ 35

⑤ 40

해설

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$f^2\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$f^3\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(f^2\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$\vdots$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) + f^2\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left\{ f\left(\frac{1}{3}\right) + f^3\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{29}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$+ \left\{ f^2\left(\frac{1}{3}\right) + f^4\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f^{30}\left(\frac{1}{3}\right) \right\}$$

$$= 15 \cdot \frac{4}{3} + 15 \cdot \frac{1}{3} = 25$$

18. 세 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1

② -3

③ 3

④ -6

⑤ 6

해설

$$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I \text{ 이므로}$$

$$(g \circ f)^{-1} \circ h = g \text{ 에서 } h = (g \circ f) \circ g$$

$$((g \circ f) \circ g)(x) = (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x - 3)$$

$$= g(f(x - 3))$$

$$= g(2(x - 3) + 1) = g(2x - 5)$$

$$= (2x - 5) - 3 = 2x - 8$$

$$2x - 8 = ax + b \text{ 에서 } a = 2, b = -8$$

$$\therefore a + b = -6$$

19. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k (x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$

② $k < \frac{25}{4}$

③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$

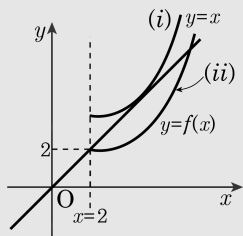
④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$

⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.

따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4 (x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접할 때,

$$x^2 - 4x + k = x, x^2 - 5x + k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 5^2 - 4k = 0$$

$$\therefore k = \frac{25}{4}$$

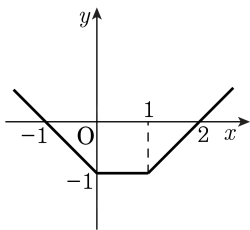
(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 2)$ 를 지날 때

$$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2 \text{ 이므로 } k = 6$$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

20. 다음 그림은 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 이때,
 $y = f(x)$ 와 $y = |f(x)|$ 의 그래프로 둘러싸
 인 부분의 넓이는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

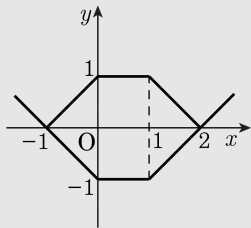
$y = |f(x)|$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그
 래프에서

x 축의 위부분은 그대로 두고 x 축의 아
 랫부분을

x 축에 대하여 대칭이동하면 된다.

따라서, 두 그래프로 둘러싸인 부분은
 다음 그림과 같으므로 그 넓이는

$$2 \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 4$$



21. $a : b = c : d$ 일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b + 2d \neq 0$, $a - 2b \neq 0$, $c - 3d \neq 0$ 이다.)

보기

㉠ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

㉡ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d}$

㉢ $\frac{a+2b}{a-2b} = \frac{c+3d}{c-3d}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \dots$ 참

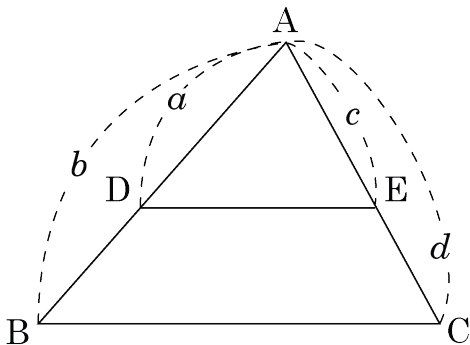
㉡ $\frac{a}{b} = \frac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc, ad = bc \dots$ 참

㉢ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \dots$ 거짓

22. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$ 일 때, 다음 중 a, b, c, d 사이의 관계로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b, c \neq d$)



① $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{d-c}$

② $ac - bd = 0$

③ $a(d-c) = c(b-a)$

④ $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$

⑤ $\frac{b-a}{a} = \frac{d}{c}$

해설

$a : b = c : d$ 이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

23. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 x , 무색생물의 수가 y 일 때, $\frac{y}{x+y} \times 100(\%)$ 로 정의된다. 지난 달 수질 검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 20%이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과 지난달에 비해 유색 생물의 수는 2배, 무색생물의 3배가되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 %인가?

① 약 14.3%

② 약 15.2%

③ 약 17.1%

④ 약 21.3%

⑤ 약 27.3%

해설

$$\text{지난달 검사 : } \frac{y}{x+y} \times 100 = 20 \Rightarrow x = 4y$$

$$\text{이번달 검사 : } \frac{3y}{2x+3y} \times 100 = \frac{3y}{11y} \times 100 \approx 27.3(\%)$$

24. 함수 $f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{5}{2}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{-x-1} \text{ 에서 } f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{-\frac{10}{2} + 3}{\frac{5}{2} - 1} = -\frac{4}{3}$$

$$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{-\frac{8}{3} + 3}{\frac{4}{3} - 1} = 1$$

$$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore f_4 = f_1, f_5 = f_2, f_6 = f_3, \dots$$

$$\therefore f_{3n+1} = f_1, f_{3n+2} = f_2, f_{3n} = f_3$$

$$100 = 3 \times 33 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore f_{100}(1) = f_1(1) = -\frac{5}{2}$$

25. 일차함수 $f(x)$ 는 실수 x 에 대하여 다음을 만족한다. $xf(x) + f(1-x) = x^2 + 2$ 이 때, $f(100)$ 의 값은?

① -101

② -100

③ 0

④ 100

⑤ 101

해설

$f(x) = ax + b$ 라 놓으면

$$x(ax + b) + a(1 - x) + b = x^2 + 2$$

$$ax^2 + (-a + b)x + (a + b) = x^2 + 2$$

위 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = 1, b = 1$$

이때 $f(x) = x + 1$ 이므로 $f(100) = 101$