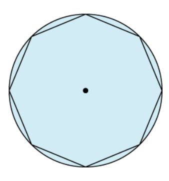
1. 넓이가 25π 인 원에 내접하는 정팔각형의 넓이를 구하여라.



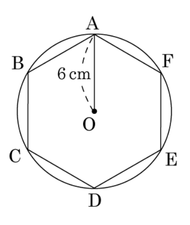
▶ 답 :

▷ 정답 : $50\sqrt{2}$

해설

정팔각형은 두 변의 길이가 같고, 그 사이에 끼인 각이 $45°$ 인 삼각형 8 개로 이루어져 있다.
넓이가 25π 인 원의 반지름은 5 이다.
따라서 $S = \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin 45°\right) \times 8 = 50\sqrt{2}$ 이다.

2. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 6cm 인 원에 내접하는 정육각형의 넓이를 구하면?

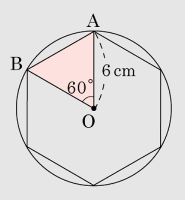


① $54\,\mathrm{cm}^2$ ② $54\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$ ③ $54\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$
④ $55\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $55\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$

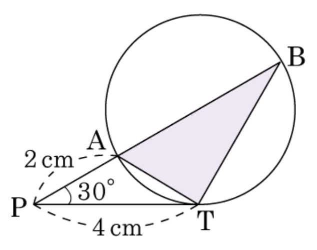
해설

$$\triangle\mathrm{ABO} = \frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\times 6\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 9\sqrt{3}\ \left(\mathrm{cm}^2\right)$$

$\therefore$ (정육각형의 넓이) $= 9\sqrt{3}\times 6 = 54\sqrt{3}\ \left(\mathrm{cm}^2\right)$



3. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 원의 접선이고, $\angle P = 30°$, $\overline{PA} = 2cm$, $\overline{PT} = 4cm$ 일 때, 삼각형 ABT 의 넓이를 구하여라.(단, 단위는 생략한다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

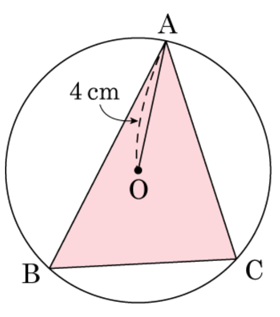
원의 접선의 성질에 의해
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 이므로 $2\overline{PB} = 4^2 \Rightarrow \overline{PB} = 8\,cm$

$\triangle PBT = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \sin 30° = 8(cm^2)$

$\triangle PAT = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin 30° = 2(cm^2)$

따라서, $\triangle ABT$ 의 넓이는 $8 - 2 = 6(cm^2)$ 이다.

4. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$ 이고, 외접원 O 의 반지름의 길이가 4cm 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라. (단, 단위는 생략한다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $12 + 4\sqrt{3}$

해설

$\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$ 이므로
$5.0pt\overset{\frown}{AB} : 5.0pt\overset{\frown}{BC} : 5.0pt\overset{\frown}{CA} = 5 : 3 : 4$ 이다.

$\angle A = \frac{3}{12} \times 180° = 45°$

$\angle B = \frac{4}{12} \times 180° = 60°$

$\angle C = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

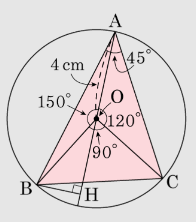
$\Rightarrow \angle BOC = 90°, \angle COA = 120°, \angle AOB = 150°$

$\triangle AOB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BH}$ ($\overline{BH}$는 삼각형의 높이)

$\overline{BH} = 10 \sin 30°$ 이므로

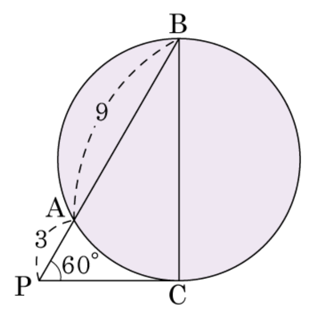
$\triangle AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$

같은 방법으로 $\triangle AOC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60° = 4\sqrt{3}$, $\triangle BOC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 90° = 8$



따라서 $\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle AOC + \triangle BOC$
$= 4 + 4\sqrt{3} + 8 = 12 + 4\sqrt{3}$ 이다.

5. 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PC}}$ 가 원의 접선일 때, $\triangle\mathrm{PBC}$ 의 넓이는?



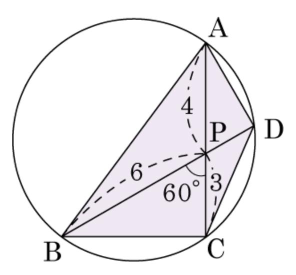
① $9\sqrt{3}$ ② $18\sqrt{3}$ ③ $27\sqrt{3}$ ④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $54\sqrt{3}$

해설

$\overline{\mathrm{PC}}^2 = 3(3+9) = 36$ 이므로 $\overline{\mathrm{PC}} = 6$ 이다.

(넓이) $= \frac{1}{2} \times 12 \times 6 \times \sin 60^\circ = 18\sqrt{3}$

6. 다음 그림과 같이 원에 내접하는 □ABCD 의 넓이는?



① $12\sqrt{2}$　② $12\sqrt{3}$　③ $13\sqrt{2}$　④ $13\sqrt{3}$　⑤ $14\sqrt{3}$

해설

□ABCD 가 원에 내접하므로 $\overline{PA} \times \overline{PC} = \overline{PB} \times \overline{PD}$ 이므로 $\overline{PD} = 2$ 이다.

따라서 □ABCD 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (4+3) \times (6+2) \times \sin 60° = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$ 이다.

7. 다음 네 개의 변수 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 다음 보기 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $a+1,\ b+1,\ c+1,\ d+1$ 의 평균은 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 평균보다 1 만큼 크다.

② $a+3,\ b+3,\ c+3,\ d+3$ 의 평균은 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 평균보다 3 배만큼 크다.

③ $2a+3,\ 2b+3,\ 2c+3,\ 2d+3$ 의 표준편차는 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 표준편차보다 2 배만큼 크다.

④ $4a+7,\ 4b+7,\ 4c+7,\ 4d+7$ 의 표준편차는 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 표준편차의 4 배이다.

⑤ $3a,\ 3b,\ 3c,\ 3d$ 의 표준편차는 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 표준편차의 9 배이다.

해설

② $a+3,\ b+3,\ c+3,\ d+3$ 의 평균은 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 평균보다 3 배만큼 크다.
→ $a+3,\ b+3,\ c+3,\ d+3$ 의 평균은 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 평균보다 3 만큼 크다.
⑤ $3a,\ 3b,\ 3c,\ 3d$ 의 표준편차는 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 표준편차의 9 배이다.
→ $3a,\ 3b,\ 3c,\ 3d$ 의 표준편차는 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 표준편차의 3 배이다.

8. 6개의 변량 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_6$의 평균이 3이고 표준편차가 4일 때, $2x_1-1, 2x_2-1, 2x_3-1, \cdots, 2x_6-1$의 평균과 표준편차는?

① 평균 : 3, 표준편차 : 8

② 평균 : 3, 표준편차 : 15

③ 평균 : 3, 표준편차 : 20

④ 평균 : 5, 표준편차 : 8

⑤ 평균 : 5, 표준편차 : 15

해설

n개의 변량 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 평균이 m이고 표준편차가 s일 때, 변량 $ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, \cdots, ax_n+b$에 대하여 평균은 $am+b$, 표준편차는 $|a|s$이므로
평균은 $2\cdot 3-1=5$이고
표준편차는 $|2|\cdot 4=8$이다.

9. 다음 물음에 답하여라.

(1) w, x, y, z의 평균이 40일 때, $w+10, x+10, y+10, z+10$의 평균을 구하여라.
(2) a, b, c의 평균이 27일 때, $5a, 5b, 5c$의 평균을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : (1) 50

▷ 정답 : (2) 135

해설

n개의 변량 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$의 평균이 m이고 표준편차가 s일 때, 변량 $ax_1+b, ax_2+b, ax_3+b, \cdots, ax_n+b$에 대하여 평균은 $am+b$이고 표준편차는 $|a|s$이다.
(1) $40+10=50$
(2) $5\times27=135$

10. 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 , 분산이 4 일 때, 변량 $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① 2, 5　② 3, 5　③ 4, 4　④ 5, 4　⑤ 6, 5

해설

세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 이므로

$\frac{a+b+c}{3}=2$

$\therefore a+b+c=6$ ……㉠

또한, $a,\ b,\ c$ 의 분산이 4 이므로

$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}=4$

$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4=12$

$a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12=12$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$a^2+b^2+c^2-4\times6+12=12$

$\therefore a^2+b^2+c^2=24$

한편, $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균은

$\frac{(a+3)+(b+3)+(c+3)}{3}=\frac{(a+b+c)+9}{3}$

$=\frac{6+9}{3}=5$

따라서 분산은

$\frac{(a+3-5)^2+(b+3-5)^2+(c+3-5)^2}{3}$

$=\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+4\times3}{3}$

$=\frac{24-4\times6+12}{3}=\frac{12}{3}=4$

11. 두 직선 $(3+a)x+y=1$, $4x+(2a-1)y=1$ 이 평행할 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{2}$

해설

$\frac{3+a}{4}=\frac{1}{2a-1}\neq 1$

$(a+3)(2a-1)=4$

$2a^2+5a-7=0$

$(a-1)(2a+7)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=-\frac{7}{2}$

그런데 $\frac{1}{2a-1}\neq 1$

즉 $a\neq 1$ 이어야 하므로 $a=-\frac{7}{2}$ 이다.

12. 세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, $3x,\ 3y,\ 3z$ 의 분산은?

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

해설

세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균이 4 이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=4$$

$\therefore\ x+y+z=12\ \cdots\cdots$ ㉠

또한, $x,\ y,\ z$ 의 분산이 2 이므로

$$\frac{(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2}{3}=2$$

$$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6$$

$$x^2-8x+16+y^2-8y+16+z^2-8z+16=6$$

$$x^2+y^2+z^2-8(x+y+z)+48=6$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2+z^2-8\times 12+48=6$$

$\therefore x^2+y^2+z^2=54$

한편, $3x,\ 3y,\ 3z$ 의 평균은

$$\frac{3x+3y+3z}{3}=\frac{3(x+y+z)}{3}=\frac{3\times 12}{3}=12$$

따라서 분산은

$$\frac{(3x-12)^2+(3y-12)^2+(3z-12)^2}{3}$$

$$=\frac{9x^2+9y^2+9z^2-72(x+y+z)+144\times 3}{3}$$

$$=\frac{9\times 54-72\times 12+432}{3}=\frac{54}{3}$$

$$=18$$

13. 다음 표는 미정이 친구 6 명의 학생들의 수학 성적의 편차를 나타낸 것이다. 분산이 8 일 때, 두 상수 a, b 에 대하여 $-\frac{ab}{3}$ 의 값을 구하여라.

이름	선영	수림	영진	희숙	경민	유림
편차 (점)	-3	-4	3	a	b	2

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

편차의 합은 0 이므로

$-3-4+3+a+b+2=0$

$\therefore\ a+b=2\ \cdots\cdots$ ㉠

또한, 분산은 8 이므로

$\frac{(-3)^2+(-4)^2+3^2+a^2+b^2+2^2}{6}=8$

$a^2+b^2+38=48$

$a^2+b^2=10\ \cdots\cdots$ ㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 에 ㉠, ㉡을 대입하면

$2^2=10+2ab,\ \ 2ab=-6\ \ \therefore\ ab=-3$

따라서 $-\frac{ab}{3}=-\frac{-3}{3}=1$ 이다.

14. 네 개의 수 5, 8, a, b 의 평균이 4이고, 분산이 7일 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

변량 5, 8, a, b 의 평균이 4 이므로

$\frac{5+8+a+b}{4}=4,\ a+b+13=16$

$\therefore\ a+b=3\cdots$ ㉠

또, 분산이 7 이므로

$\frac{(5-4)^2+(8-4)^2+(a-4)^2+(b-4)^2}{4}=7$

$\frac{1+16+a^2-8a+16+b^2-8b+16}{4}=7$

$\frac{a^2+b^2-8(a+b)+49}{4}=7$

$a^2+b^2-8(a+b)+49=28$

$\therefore\ a^2+b^2-8(a+b)=-21\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ a^2+b^2=8(a+b)-21=8\times3-21=3$

15. 다섯 개의 변량 5, 7, x, y, 8 의 평균이 6 이고, 분산이 5 일 때, $2xy$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

다섯 개의 변량 5, 7, x, y, 8 의 평균이 6 이므로

$\frac{5+7+x+y+8}{5}=6,\quad x+y+20=30$

$\therefore x+y=10\ \cdots\cdots ㉠$

또, 분산이 5 이므로

$\frac{(5-6)^2+(7-6)^2+(x-6)^2+(y-6)^2}{5}$

$+\frac{(8-6)^2}{5}=5$

$\frac{1+1+x^2-12x+36+y^2-12y+36+4}{5}=5$

$\frac{x^2+y^2-12(x+y)+78}{5}=5$

$x^2+y^2-12(x+y)+78=25$

$\therefore x^2+y^2-12(x+y)=-53\quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2=12(x+y)-53=12\times 10-53=67$

$\therefore\ x^2+y^2=67\quad \cdots\cdots ㉢$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy,\quad 10^2=67+2xy,\ 2xy=33$

$\therefore 2xy=33$

16. 세 실수 $a,\ b,\ c$ 가 $a^2+b^2+c^2=24,\ a+b,\ b+c,\ c+a$ 의 평균이 4 일 때, $ab,\ bc,\ ca$ 의 평균을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$a+b,\ b+c,\ c+a$ 의 평균이 4 이므로

$\frac{2(a+b+c)}{3}=4,\quad a+b+c=6$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$24=6^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=6$ 따라서 $ab,\ bc,\ ca$ 의 평균은

$\frac{ab+bc+ca}{3}=\frac{6}{3}=2$ 이다.

17. 네 개의 변량 4, 6, a, b 의 평균이 5 이고, 분산이 3 일 때, 7, a^2, b^2, 9 의 평균은?

① 16　② 17　③ 19　④ 21　⑤ 23

해설

변량 4, 6, a, b 의 평균이 5 이므로

$$\frac{4+6+a+b}{4}=5,\quad a+b+10=20$$

$\therefore a+b=10 \quad \cdots\cdots ㉠$

또한, 분산이 3 이므로

$$\frac{(4-5)^2+(6-5)^2+(a-5)^2+(b-5)^2}{4}=3$$

$$\frac{1+1+a^2-10a+25+b^2-10b+25}{4}=3$$

$$\frac{a^2+b^2-10(a+b)+52}{4}=3$$

$a^2+b^2-10(a+b)+52=12$

$\therefore\ a^2+b^2-10(a+b)=-40 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ a^2+b^2=10(a+b)-40=10\times10-40=60$

따라서 7, a^2, b^2, 9 의 평균은

$$\frac{7+a^2+b^2+9}{4}=\frac{16+60}{4}=19$$이다.

18. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 5, 3 일 때, $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 5 이므로

$\frac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=15 \cdots\cdots$ ㉠

또한, x, y, z 의 분산이 3 이므로

$\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3}=3$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=9$

$x^2-10x+25+y^2-10y+25+z^2-10z+25=9$

$x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75=9$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10\times 15+75=9$

$\therefore x^2+y^2+z^2=84$

따라서 $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ 의 평균은

$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)=\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)=\frac{84}{6}=14$ 이다.