1. 실수 a, b에 대하여 $a > b$일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

ㄱ $|a| > |b|$　　ㄴ $a^3 > b^3$

ㄷ $a^2 > b^2$　　ㄹ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ $a > 0 > b$인 경우에서는 b의 절댓값이 더 클 수도 있다.

ㄷ ㄱ과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.

ㄹ 역시 $a > 0 > b$인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

2. $-2 \le x \le 2$일 때, $\frac{20}{3-x}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$-2 \le x \le 2$에서

$-2 \le -x \le 2$,

$1 \le 3-x \le 5$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{3-x} \le 1$

$\therefore 4 \le \frac{20}{3-x} \le 20$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

3. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$　　② $x \geq -1$　　③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$　　⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6\ \therefore x \geq 2$

4. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로

$a-2>0$

$x \geq \dfrac{4}{a-2}$ 이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$

$\therefore a=4$

5. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1>2kx+k$가 성립할 때, k값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$k^2x+1>2kx+k$에서
$(k^2-2k)x>k-1$,
$k(k-2)x>k-1$
해가 모든 실수이므로
$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.
$\therefore\ k=0$

6. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y$, $y-1$은 실수이므로 $x+2y=0$, $y-1=0$

$\therefore$ $y=1$, $x=-2y=-2$

$\therefore$ $x+y=-1$

7. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

8. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

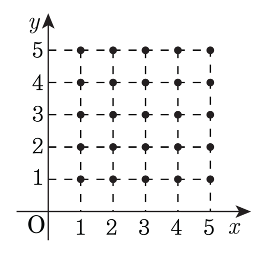
해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

9. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개　② 1 개　③ 2 개
④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$
$\qquad\qquad\quad =(x-2)(y+1)$ 이므로
$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는
ⅰ) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$
ⅱ) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$
ⅲ) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$
ⅳ) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,
$x=-1,\ y=-2$
$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

10. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha,\ y = \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy + 2x - 3y = 10,\ xy + 2x - 3y - 6 = 4,$

$(x - 3)(y + 2) = 4$

$y + 2 \geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x - 3 = 1,\ y + 2 = 4$

$\therefore\ x = 4,\ y = 2$

11. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a는 -10 이상 -2 이하이다.

② a는 -2 이상 6 이하이다.

③ a는 6 이상이다.

④ a는 0 이하이다.

⑤ a는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)
$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = a + 2$
이 두 식에서 a를 소거하면
$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2,\ (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$
$\alpha - 1, \beta - 1$이 정수이므로
$\therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 4$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = 0$
$\therefore\ a = 6,\ -2$

12. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개이고 배점은 80 점이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11문항

13. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $a > b,\ b > c$이면 $a > c$

② $a > b$이면 $a + c > b + c,\ a - c > b - c$

③ $a > b,\ c > 0$이면 $ac > bc,\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

④ $a > b,\ c < 0$이면 $ac < bc,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

해설

⑤ 반례 $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{b} = 1$

$\therefore\ \frac{1}{2} < 1$

14. 두 식 $2x + y = 10$, $y < x < 3y$을 동시에 만족시키는 정수 x, y에 대하여 $x - y$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2x + y = 10$에서 $y = 10 - 2x$이므로
$10 - 2x < x < 3(10 - 2x)$
$\therefore \frac{10}{3} < x < \frac{30}{7}$
x는 정수이므로 $x = 4$
따라서 $y = 2$
$\therefore x - y = 2$

15. 부등식 $bx + (a - b) < 0$의 해가 $x > 2$일 때, 부등식 $ax + 2a - b > 0$의 해를 구하면?

① $x > -1$　② $x < -1$　③ $x > -2$
④ $x < -2$　⑤ $x > -3$

해설

$bx + (a - b) < 0$의 해가 $x > 2$이려면
$b < 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\frac{b - a}{b} = 2 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉡에서 $b - a = 2b \therefore\ a = -b$
㉠에서 $b < 0$이므로 $a > 0$
$ax + 2a - b > 0$에서 $ax + 2a + a > 0 \therefore\ ax > -3a$
$a > 0$ 이므로 $x > -3$

16. $-3a-2<-3b-2$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$ ② $-3a>-3b$

③ $5a-3>5b-3$ ④ $3-a>3-b$

⑤ $\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$

해설

$-3a-2<-3b-2 \cdots$ ㉠

(㉠ $+2$) $\div(-3)$ 하면, $a>b$이다.

따라서 만족하는 식은 $5a-3>5b-3$

17. $a < b$일 때, □안의 등호가 알맞은 것을 모두 고르면?

㉠ $a+2 \boxed{<} b+2$	㉡ $-a-4 \boxed{>} -b-4$
㉢ $\frac{1}{2}a+3 \boxed{>} \frac{1}{2}b+3$	㉣ $-\frac{a}{3} \boxed{<} -\frac{b}{3}$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉢ 부등식의 양변에 양수를 곱하거나 같은 수를 더하더라도 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $\frac{1}{2}a+3 < \frac{1}{2}b+3$

㉣ 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀌므로 $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

18. 세 실수 a, b, c에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

② $a > b$ 이면 $a - c < b - c$

③ $a < b < 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

④ $ac > bc$ 이면 $a > b,\ c > 0$

⑤ $a^2 + b^2 + c^2 \leqq ab + bc + ca$

해설

① $a > 0 > b$인 경우에서 $|b| > |a|$라면 제곱 값에 대해서는 $b^2 > a^2$의 결과가 나온다.

② 부등식의 기본 성질로 양변에 같은 수를 빼서는 부호가 바뀌지 않는다.

④ $a > b, c > 0$이면 $ac > bc$일 수는 있으나 보기 ④번 같은 경우에는 $ac > bc$이면 $a < b, c < 0$인 경우도 있기 때문에 성립하지 않는다.

⑤ 주어진 식의 양변에 2를 곱하고 좌변으로 몰아 정리하면
$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \leqq 0$
$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \leqq 0$
$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0$ 위와 같이 되므로 세 실수 사이의 관계가
$a - b = 0,\ b - c = 0,\ c - a = 0$을 성립하지 않으면 성립하지 않는 보기이다.

19. $a > b > 1$ 인 실수 $a,\ b$ 에 대하여 다음 중 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$　② $\frac{a}{1-a} > \frac{b}{1-b}$　③ $a+3 < b+3$

④ $a-1 < b-1$　⑤ $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

해설

① 양변에 ab 를 곱하면 주어진 조건과 다르게 나온다.

② $1-a<0, 1-b<0$ 에서 $(1-a)(1-b)>0$ 이므로
양변에 $(1-a)(1-b)$ 를 곱하면
$a(1-b) > b(1-a),\ a-ab > b-ab,\ a > b$
주어진 조건에 만족한다.

③ 양변에 3을 빼주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

④ 양변에 1을 더해주면 주어진 조건에 만족하지 않는다.

⑤ $1+a>0, 1+b>0$ 이므로 $(1+a)(1+b)$ 를 양변에 곱하면
$a(1+b) < b(1+a)$
$a+ab < b+ab$
$a<b$
주어진 조건을 만족하지 않는다.

20. $0 < a < b$인 실수, a, b에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

해설

$0 < a < b$에서 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \cdots$ ㉠

㉠의 양변에 1을 더하면

$\frac{1}{a} + 1 > \frac{1}{b} + 1$, $\frac{1+a}{a} > \frac{1+b}{b} \cdots$ ㉡

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

21. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ②\end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1, \beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2, \beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$