1. 다항식 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 을 인수분해하면?

① $(x-1)^2(x+1)$　　② $(x+1)^2(x-1)$
③ $(x-1)(x+1)$　　④ $(x-1)^3$
⑤ $(x+1)^3$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= x^2(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)(x^2-1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$
$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$

해설

인수정리를 이용하여 인수분해할 수 있다.
$f(1) = 0$,
즉 $x-1$ 로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

2. x^4-6x^2+8를 인수분해하면? (단, 유리수 범위에서 인수분해 하여라.)

① $(x^2-2)(x^2-4)$

② $(x^2-2)(x-4)(x+4)$

③ $(x^2-2)(x-2)(x+2)$

④ $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

⑤ $(x^2-\sqrt{2})(x-2)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-6x^2+8 &= (x^2)^2-6x^2+8 \\ &= (x^2-2)(x^2-4) \\ &= (x+2)(x-2)(x^2-2) \end{aligned}$$

해설

인수정리를 이용할 수 있다.
$f(x)=x^4-6x^2+8$
$f(2)=0,\quad f(-2)=0,$
즉, $(x-2)(x+2)$로 나누어 떨어지므로
조립제법을 써서 인수분해하면 된다.

3. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

4. 다음 중 다항식 x^4-8x^2-9의 인수가 아닌 것은?

① $x-3$
② $x+3$
③ x^2+1
④ x^2+9
⑤ x^3+3x^2+x+3

해설

준 식을 인수분해 하면

$$\begin{aligned} x^4-8x^2-9 &= (x^2+1)(x^2-9) \\ &= (x^2+1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

⑤ $x^2(x+3)+x+3=(x^2+1)(x+3)$

5. 100개의 다항식 x^2-x-1 , x^2-x-2 , $\cdots$, $x^2-x-100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개　② 7개　③ 9개　④ 11개　⑤ 13개

해설

$x^2-x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$ 는 자연수)라 하면
$b=a+1$, $ab=n$ $(1 \le n \le 100)$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

6. 다음 ㉠~㉣중 인수분해를 한 결과가 <u>틀린</u> 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=(a-b)(x+y)(x-y)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x-2y)(3x+y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2-5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2=(2x-y+2)(x-y+1)$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=x^2(a-b)+y^2(a-b)=(a-b)(x^2+y^2)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x+2y)(3x-y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$

$=2x^2-(4+y)x-(y^2-y-2)$

$=2x^2-(4+y)x-(y-2)(y+1)$

$=\{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}$

$=(2x+y-2)(x-y-1)$

7. $16a^4-250ab^3$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① a
② $2a-5b$
③ $2a(2a-5b)$
④ $4a^2+10ab+25b^2$
⑤ $2a(2a+5b)$

해설

(준식) $=2a(8a^3-125b^3)$
$=2a\{(2a)^3-(5b)^3\}$
$=2a(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)$

8. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$　② $-x - y$　③ $x + y - 2$
④ $x - y$　⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y)\\ &= (x + y)^2 - 2(x + y)\\ &= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2)\\ &= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

9. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

10. 다항식 $(x+3)^4-6(x+3)^2+8$을 인수분해 하면 $(x+1)(x+5)g(x)$일 때, $g(-1)g(1)$의 값으로 옳은 것은?

① 28　② 26　③ 24　④ 14　⑤ 12

해설

$A=(x+3)^2$로 치환하면 주어진 식은

$$\begin{aligned}A^2-6A+8&=(A-4)(A-2)\\&=\left(x^2+6x+5\right)\left(x^2+6x+7\right)\\&=(x+1)(x+5)(x^2+6x+7)\\&=(x+1)(x+5)g(x)\end{aligned}$$

따라서, $g(x)=x^2+6x+7$

$\therefore\ g(-1)\times g(1)=2\times 14=28$

11. x에 대한 다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$가 x에 대한 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 정수 a의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

(준식) $=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+a$
$\quad =(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+a$
$x^2+5x+4=Y$로 치환하면
(준식) $=Y(Y+2)+a$
$\quad =Y^2+2Y+a$
$\therefore$ 완전제곱식이 되려면 $a=1$

12. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3　② 4　③ 6　④ 7　⑤ 9

해설

$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$
$=4\times 3^n$
$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$
$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$
$\therefore\ x^2-y^2=3$

13. x^4-3x^2+1을 인수분해 하면?

① $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$ ② $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
③ $(x^2+2x-1)(x^2-x-1)$ ④ $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$
⑤ $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$

해설

$$\begin{aligned} x^4-3x^2+1 &= x^4-2x^2+1-x^2 \\ &= (x^2-1)^2-x^2 \\ &= (x^2+x-1)(x^2-x-1) \end{aligned}$$

14. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

ㄱ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
ㄴ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
ㄷ $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=x^4+x+1$
ㄹ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$
ㅁ $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄹ ⑤ ㅁ

해설

ㄷ $x+1=A$로 치환하여 전개하면
$(x^2+A)(x^2-A)=x^4-A^2=x^4-x^2-2x-1$

15. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$
$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$
그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로
$x+y+z=0$

16. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

17. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터
$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡
$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢
$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로
㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣
㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로
$3xyz=2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$
또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로
$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

18. $a+b+c=0$일 때, $\frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ac}+\frac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$(\text{준식}) = \frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$$
$$= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$$

19. $a+b+c=0$, $abc \neq 0$ 일 때, $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0)$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore$(준식) $=\frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2}{3}\left(\frac{bc+ca+ab}{abc}\right)$

$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$