

1. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A - B = \{2, 4\}$

② $B - A = \{3, 5\}$

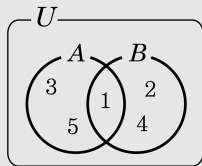
③ $(A - B)^c = \{1, 2, 4\}$

④ $A^c = \{1, 2, 4\}$

⑤ $B^c = \{1, 3, 5\}$

해설

주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



① $A - B = \{3, 5\}$

② $B - A = \{2, 4\}$

④ $A^c = \{2, 4\}$

⑤ $B^c = \{3, 5\}$

2. 두 집합 $A = \{2, 3, a^2\}$, $B = \{2a + 3, -a + 3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1\}$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$A \cap B = \{1\}$ 에서 $1 \in A$ 이므로 $a^2 = 1 \therefore a = 1$ 또는 $a = -1$

(i) $a = 1$ 일 때, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{2\}$ 이다.

(ii) $a = -1$ 일 때, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$ 이므로 $A \cap B = \{1\}$ 이다.

$\therefore a = -1$

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 5$, $n(B) = 7$ 이고 $n(A \cap B) = 3$ 일 때, $n(A \cup B)$ 는?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 5 + 7 - 3 = 9 \end{aligned}$$

4. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.

② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.

③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.

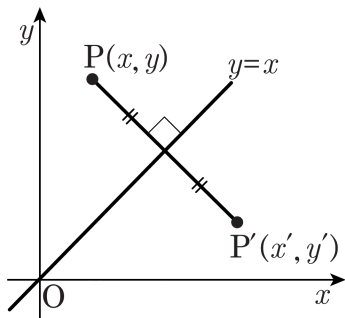
④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.

⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

5. 다음은 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표를 구하는 과정이다. 이 때, (가) ~ (라)에 알맞지 않은 것은?



점 $P(x, y)$ 를

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라고 하면

선분 PP' 의 중점

$$M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) \text{ 은}$$

직선 (가) 위에 있으므로

$$\frac{y+y'}{2} = \text{(나)} \dots\dots \text{㉠}$$

또한, 직선 PP' 은 직선 $y = x$ 와 수직이므로

$$1 \times \text{(다)} = -1 \leftarrow (\text{수직인 두 직선의 기울기의 곱이 } -1)$$

이것을 정리하면

$$x' + y' = \text{(라)} \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x' = y, y' = x$

따라서, 구하는 점 P' 의 좌표는 (마) 이다.

① (가) : $y = x$

② (나) : $\frac{x+x'}{2}$

③ (다) : $\frac{y'-y}{x'-x}$

④ (라) : $x + y$

⑤ (마) : (x, y)

해설

구하는 점 P' 의 좌표는 (y, x) 이다.

6. 좌표평면 위의 점 P 를 y 축에 대하여 대칭이동 하고 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 원래의 점 P 가 되었다. 점 P 의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

② $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

③ $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right)$

⑤ $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

해설

$P = (x, y)$ 라 하면,

$$(x, y) \xrightarrow{y\text{축 대칭}}$$

$$(-x, y) \xrightarrow{x\text{축으로 2, } y\text{축으로 3만큼 평행이동}}$$

$$(-x + 2, y + 3) \xrightarrow{y=x\text{에 대칭}} (y + 3, -x + 2)$$

$$\Rightarrow (y + 3, -x + 2) = (x, y)$$

$$\Rightarrow x = y + 3, \quad y = -x + 2$$

$$\text{두 식을 연립하면, } x = \frac{5}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore P \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

7. 좌표평면 위의 점 $(1, 5)$ 을 $y = x + 3$ 에 대하여 대칭이동 시킨 점의 좌표를 구하면?

① $(-1, 2)$

② $(2, 1)$

③ $(2, 3)$

④ $(2, 4)$

⑤ $(3, 5)$

해설

1) 점 $(1, 5)$ 와 대칭이동된 점

(X, Y) 을 이은 선분은 $y = x + 3$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{Y - 5}{X - 1} = -1 \Rightarrow X + Y - 6 = 0$$

2) $(1, 5)$ 와 (X, Y) 의 중점은

$y = x + 3$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{Y + 5}{2} = \frac{X + 1}{2} + 3$$

$$\Rightarrow X - Y + 2 = 0$$

$\therefore$ 연립하면 $X = 2, Y = 4$

8. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\emptyset) = 1$

② $A = \{2\}$ 이면 $n(A) = 2$

③ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 3$

④ $A = \{4, 6\}$, $B = \{6, 7, 8\}$ 일 때, $n(A) + n(B) = 4$

⑤ $A = \{x \mid 2 \times x = 12, x \text{는 짝수}\}$ 일 때, $n(A) = 1$

해설

① $n(\emptyset) = 0$

② $n(A) = 1$

③ $3 - 2 = 1$

④ $n(A) + n(B) = 2 + 3 = 5$

9. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 것이 아닌 것은?

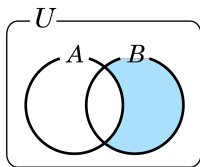
① $B - A$

② $A^c \cap B$

③ $A^c \cup B$

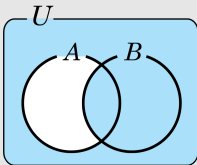
④ $B - (A \cap B)$

⑤ $(A \cup B) - A$



해설

③ $A^c \cup B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



10. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow \sim r$

③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P, Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ 등이 참인 명제가 된다.

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A^c = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.

그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.

따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

12. 다음 집합 중에서 무한집합이 아닌 것을 모두 구하면?

① $\{x \mid x \text{는 자연수 부분이 1인 대분수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 3보다 작은 3의 배수}\}$

③ $\{x \mid 2 < x < 5 \text{인 수}\}$

④ $\{x \mid 2 < x < 5 \text{인 정수}\}$

⑤ $\{x \mid x = 4n - 5, n \text{은 자연수}\}$

해설

① $\left\{1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \dots\right\} \Rightarrow \text{무한집합}$

② $\emptyset \Rightarrow \text{유한집합}$

③ 무한집합

④ $\{3, 4\} \Rightarrow \text{유한집합}$

⑤ $\{-1, 3, 7, 11, \dots\} \Rightarrow \text{무한집합}$

13. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

㉡ $A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.

㉢ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

㉢ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

14. 집합 $A = \{a, b, c\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 32 개

② 64 개

③ 128 개

④ 256 개

⑤ 512 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는

$2^3 = 8$ (개) 이므로 $n(B) = 8$ 이다.

따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는

$2^{n(B)} = 2^8 = 256$ (개) 이다.

15. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

㉠ $X \subset A$

㉡ $\{3, 5\} \subset X$

㉢ $n(X) \leq 5$

① 12 개

② 13 개

③ 14 개

④ 15 개

⑤ 16 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 에서 $\{3, 5\}$ 를 반드시 포함하며 원소의 개수가 5 개이하인 부분집합이다.

원소의 개수가 2개인 부분집합 : $\{3, 5\}$

원소의 개수가 3개인 부분집합 : $\{1, 3, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 5, 11\}$

원소의 개수가 4개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 9\}, \{1, 3, 5, 11\}, \{3, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 9, 11\}$

원소의 개수가 5개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{1, 3, 5, 7, 11\}, \{1, 3, 5, 9, 11\}, \{3, 5, 7, 9, 11\}$

16. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A = \{2, 4, 6\}, A \cap B = \{2\}, B \cap A^c = \{1, 3, 5\}, A^c \cap B^c = \{7\}$ 일 때, A^c 은?

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 5\}$

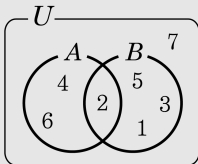
③ $\{1, 7\}$

④ $\{3, 5, 7\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7\}$

해설

$B \cap A^c = \{7\} = B - A$ 이므로
 $A^c = U - A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.



17. 집합 $S = \{\emptyset, 0, 1, \{1, 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $0 \in S$

② $\{0, 2\} \notin S$

③ $\emptyset \subset S$

④ $\{1, 2\} \in S$

⑤ $\{\emptyset\} \in S$

해설

집합 S 의 원소는 $\emptyset, 0, 1, \{1, 2\}$ 이다.

① $0 \in S \rightarrow 0$ 은 집합 S 의 원소이므로 옳다.

② $\{0, 2\} \notin S \rightarrow 2$ 는 집합 S 의 원소가 아니므로 0 과 2 로 이루어진 집합은 S 의 부분집합이 될 수 없다. 따라서 $\{0, 2\} \notin S$ 는 옳다.

③ $\emptyset \subset S \rightarrow \emptyset$ 는 집합 S 의 원소이지만 공집합($\emptyset$)는 모든 집합의 부분집합이므로 옳다.

④ $\{1, 2\} \in S \rightarrow \{1, 2\}$ 는 집합 S 의 원소이므로 옳다.

⑤ $\{\emptyset\} \in S \rightarrow \{\emptyset\}$ 은 집합 S 의 원소가 아니므로 옳지 않다.

18. $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$ 인 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$ 를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$ 가 가질 수 있는 값의 범위는?

- ① $1 < k \leq \frac{4}{3}$ ② $1 \leq k < \frac{4}{3}$ ③ $0 < k < 2$
 ④ $0 < k \leq 2$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1$, $y < 1$ 에서 $1 - x > 0$, $1 - y > 0$ 이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$
 양변에 $x + y - 1$ 을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면

$$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$$

마찬가지방법으로 yz, zx 를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

또, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ 에서 ($\because x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0$
 에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$ 를 더한다)

$$4 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 1 < xy + yz + zx \leq \frac{4}{3}$$

19. x, y 는 양수이고 $\frac{2}{x} + \frac{8}{y} = 3$ 일 때, $x + y$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

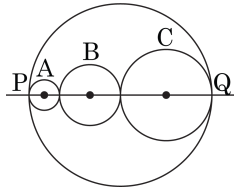
④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x + y &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (x + y) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{8}{y} \right) (x + y) \\&= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} + 8 \right) \\&= \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \right) \geq \frac{1}{3} \left(10 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{8x}{y}} \right) \\&= \frac{1}{3}(10 + 8) = 6\end{aligned}$$

20. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겹넓이의 총합이 40π 일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$

② $6\sqrt{35}$

③ $8\sqrt{35}$

④ $10\sqrt{35}$

⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z 라 하면
구의 겹넓이는

$$S_1 = 4\pi x^2, S_2 = 4\pi y^2, S_3 = 4\pi z^2$$

$$4\pi(x^2 + y^2 + z^2) = 40\pi$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(2^2 + 4^2 + 6^2) \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$10 \cdot 56 \geq (2x + 4y + 6z)^2$$

$$4\sqrt{35} \geq 2x + 4y + 6z$$

PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x + 4y + 6z)$ 이므로 $8\sqrt{35}$