

1. 다음 중 명제의 대우가 참인 것은?

- ① x 가 유리수이면 x^2 은 유리수이다.
- ② 두 직사각형의 넓이가 같으면 두 직사각형은 합동이다.
- ③ $x^2 = y^2$ 이면 $x = y$ 이다.
- ④ 닮음인 두 삼각형은 합동이다.
- ⑤ x 또는 y 가 무리수이면 $x + y$ 가 무리수이다.

해설

명제의 대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

2. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가)조건이다.
 - $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나)조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\},$$
$$Q = \{x \mid x > -2\} \text{ 라고 하면}$$
$$P \subset Q, \quad \therefore \text{충분조건}$$
$$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\},$$
$$S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\} \text{ 라고 하면}$$
$$R = S, \quad \therefore \text{필요충분조건}$$

3. 다음에서 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$$p : a, b \text{는 모두 짝수} \quad q : a + b \text{는 짝수}$$

▶ 답: 조건

▶ 정답 : 충분조건

해설

a, b 는 모두 짝수 $\rightarrow a + b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
 $a = 2m, b = 2n$ (n, m 은 자연수) 이면,
 $a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$ 이므로 짝수이다.
 한편, $a = 3, b = 3$ 일 때 $a + b = 6$ 이므로 짝수이지만, a, b 는
 모두 홀수이다.
 $\therefore p$ 는 q 의 충분조건이다.

4. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

5. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = -7, f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7, 3a = -9$

$\therefore a = -3$

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, a\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 집합 A 는 반드시 2 와 5 를 포함해야 한다.
따라서 $a = 5$ 이다.

집합 B 또한 $A \cap B = \{2, 5\}$ 에 의하여 원소 2 와 5 를 반드시 포함하고, 원소 1 은 포함하지 않는 집합이어야 한다.

$$\therefore B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\therefore 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

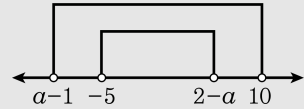
7. 다음 두 조건 $p : a - 1 < x \leq 10$, $q : -5 < x \leq 2 - a$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값으로 알맞지 않은 것은?

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해서는

$\{x \mid -5 < x \leq 2 - a\} \subset \{x \mid a - 1 < x \leq 10\}$ 이어야 하므로 다음 그림에서



$$a - 1 \leq -5, 2 - a \leq 10$$

$$\therefore -8 \leq a \leq -4$$

8. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) &= ab + \frac{4}{ab} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9\end{aligned}$$

따라서, 최솟값은 9

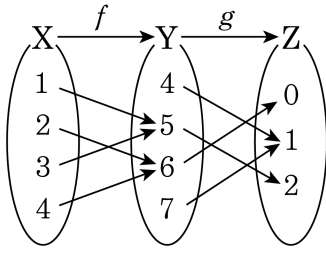
9. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

11. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g 에 대하여 $(g \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?



- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2$

12. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x - 1)(x + 2)$ 에서
 $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
 $f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
 $\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

13. 두 함수 $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $(f \circ g \circ f)(1)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

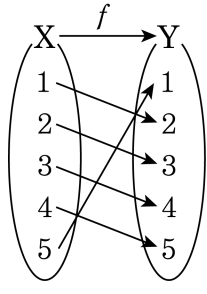
④ 1

⑤ 2

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = 1$
 $\therefore (f \circ g \circ f)(1) = f(1) = 0$

14. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고, 함수 $f : X \rightarrow X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a 의 값은?



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$

$\therefore a = 1$

15. 두 집합 $X = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$,
 $Y = \{y \mid 2 \leq y \leq 9\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 $f(x) = ax^2 + b$ 로
정의한다. 이 때 $f^{-1}(x)$ 가 존재하도록 상수 a, b 를 정할 때, $a + b$ 의
값은? (단, $a < 0$)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

역함수가 존재하기 위해서는 일대일 대응이어야한다.

$a < 0$ 이므로 $f(x) = ax^2 + b$ 는 x 가 증가할 때

$f(x)$ 는 감소하고 $f(1) = 9, f(2) = 2$ 이다.

$$\begin{cases} a + b = 9 & \cdots \textcircled{1} \\ 4a + b = 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②을 연립하면

$$a = -\frac{7}{3}, b = \frac{34}{3}$$

$$\therefore a + b = 9$$

16. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 X, Y 가 $X \cup Y = U$, $X \cap Y = \emptyset$ 을 만족한다고 한다. 이 때, X 에서 Y 로의 일대일 대응이 되는 함수 f 의 개수를 구하면?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 12개

해설

$$U = \{1, 2, 3, 4\} \text{ 에서 } X, Y \subset U, X \cup Y = U,$$
$$X \cup Y = \emptyset \text{ 이다.}$$

$f : X \rightarrow Y$ 이 일대일 대응이 되려면

$$n(X) = n(Y)$$
$$n(X \cup Y) = n(U) = 4, X \cup Y = \emptyset \text{ 이므로}$$
$$n(X) + n(Y) = 4 \text{ 이다.}$$
$$\therefore n(X) = n(Y) = 2$$

$X = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$ 의 6 가지 경우가 생
기며

X 에서 Y 로의 대응방법이 각각 2 가지씩 생기므로

$$\therefore 2 \times 6 = 12$$

17. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow A$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 2 \text{일 때}) \\ 0 & (x > 2 \text{일 때}) \end{cases} \text{라 정의하자. 이 때, } f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$$

의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

1) $f(1) = 2, f^2(1) = 3, f^3(1) = 0, f^4(1) = 1 \cdots$
 $\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$
 $\therefore f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$
2) $f(3) = 0, f^2(3) = 1, f^3(3) = 2, f^4(3) = 3, f^5(3) = 0 \cdots$
 $\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501}(3) = 3$
 $\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$
 $\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$

18. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cap B)^c = \{a, b, c\}$, $(A - B) \cap (A \cup B^c) = \{c\}$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

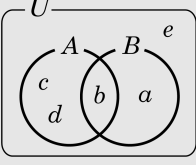
$$\begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e\} \text{ 이고 } (A \cap B)^c = \{a, b, c\} \text{ 이므로} \\ A \cap B &= \{b, d\}, \\ (A - B) \cap (A \cup B^c) &= (A - B) \cap (A^c \cap B)^c \\ &= (A - B) - (B - A) \\ &= A - B \\ &= \{c\} \end{aligned}$$

$$\therefore n(A - B) = 1$$

19. $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \{c, d\}, B - A = \{a\}, A^c \cap B^c = \{e\}$ 일 때, 집합 B 는?
- ① $\{a\}$ ② $\{b\}$ ③ $\{a, b\}$
- ④ $\{a, c\}$ ⑤ $\{a, b, c\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B = \{a, b\}$ 이다.



20. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 7\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?
- ① $\{5, 6\}$ ② $\{6, 7\}$ ③ $\{4\}$
④ $\{5, 6, 7\}$ ⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{1, 2, 3, 4, 7\})^c = \{5, 6\}$ 이다.

