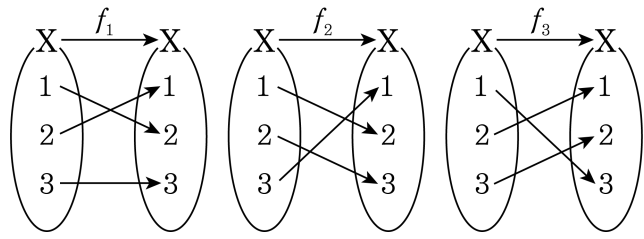


1. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 X 로의 일대일 대응 f_1, f_2, f_3 가 다음과 같다. 이 때, 다음 중 $f_2 \circ f_2$ 와 같은 것은?



- ① f_1 ② f_2 ③ f_3
④ $f_1 \circ f_1$ ⑤ $f_3 \circ f_3$

해설

보기의 합성함수를 각각 구해보면

$f_1 \circ f_1$

$f_2 \circ f_2$

$f_3 \circ f_3$

위 그림에서 $f_2 \circ f_2 = f_3$ 임을 알 수 있다.

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

- i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

3. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3

② $\frac{8}{3}$

③ 6

④ $\frac{13}{2}$

⑤ 7

해설

$$\frac{x+1}{x-2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x+1 = tx-2t, (t-1)x = 2t+1$$

$$\therefore x = \frac{2t+1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{3 \times \frac{2t+1}{t-1} + 4}{\frac{2t+1}{t-1} + 1} = \frac{10t-1}{3t}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}$$

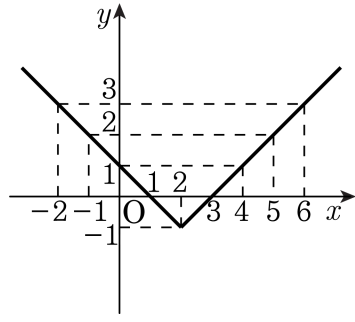
4. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서
 $(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
 $f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
 $X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
 $X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

6. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5
- ② 3
- ③ 1
- ④ -3
- ⑤ -5

해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

7. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

8. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

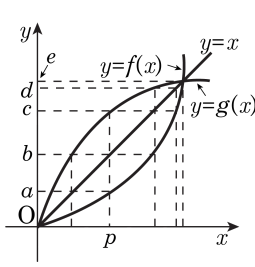
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \\ &\quad \dots \\ f^n(x) &= x+n \\ \therefore f^{10}(2) &= 2+10 = 12 \end{aligned}$$

9. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)
- ① a ② b ③ c
④ d ⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

10. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
 $= f((x+1)+1) = f(x+2)$
 $= (x+2)+1 = x+3$
 $\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
 $= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
 $= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 $f(x) = ax + b, g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

- ① 60 ② 55 ③ 51 ④ 48 ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b \\ &= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots \cdots \textcircled{1} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1 \\ &= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \text{모든 실수 } x \text{ 에 대하여 } \textcircled{1} &= \textcircled{2} \text{ 이므로} \\ 2a &= 2a^2, \quad 3a = 4ab + 3a, \quad a + b = 2b^2 + 3b + 1 \\ \text{위의 식을 연립하여 풀면 } a &= 1, \quad b = 0 (\because a \neq 0) \\ \text{즉, } f(x) &= x \text{ 이므로} \\ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \end{aligned}$$

12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

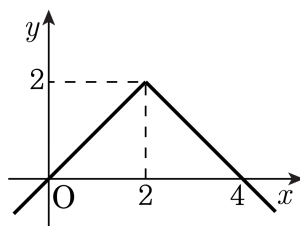
$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

13. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
 ④ 4 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \leq 2) & \cdots \textcircled{A} \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$\therefore x = 1$$

$$\textcircled{B} \text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 4) = -x + 4$$

$$\therefore x = 3$$

실근의 개수 : 2 개.