1. 원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 의 값이 -1 에서 5 까지 증가할 때, y 의 값은 24 만큼 감소한다. 다음 중 이 그래프 위에 있는 점은?

보기

㉠ $(2, -4)$ ㉡ $(-4, -16)$ ㉢ $(3, 9)$

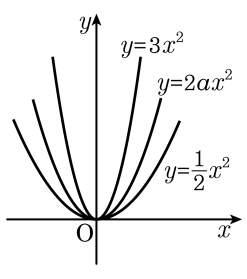
㉣ $(-4, -32)$ ㉤ $(4, -2)$

① ㉠,㉡ ② ㉠,㉣ ③ ㉡,㉣ ④ ㉢,㉤ ⑤ ㉣,㉤

해설

원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수를 $f(x) = ax^2$ 이라 하자.
$f(x) = ax^2$ 에 대하여 $f(-1) = a$, $f(5) = 25a$ 이므로 $25a - a = -24$, $24a = -24$, $a = -1$ 이다.
$\therefore f(x) = -x^2$
㉠ $f(2) = -1 \times (2)^2 = -4 \quad \therefore (2, -4)$
㉣ $f(-4) = -1 \times (-4)^2 = -16 \quad \therefore (-4, -16)$
따라서 주어진 그래프 위의 점은 ㉠, ㉡이다.

2. 이차함수 $y = 3x^2$, $y = 2ax^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프가 다음과 같다. 상수 a 의 값의 범위가 $m < a < n$ 일 때, $m + n$ 의 값은?



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$
④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\frac{1}{2} < 2a < 3$ 이므로 $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{2}$

$\therefore m = \frac{1}{4}, \quad n = \frac{3}{2}$

$\therefore \ m + n = \frac{7}{4}$

3. 다음 중 함수 $y = ax^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 점 $(0,\ 0)$ 을 지난다.

② $a > 0$ 일 때, y 의 값은 0보다 크다.

③ y 축에 대하여 대칭이다.

④ $a > 0$ 이면 아래로 볼록한 그래프이다.

⑤ $a < 0$ 일 때, $x > 0$ 이면 x 가 증가할 때 y 는 감소한다.

해설

② $a > 0$ 일 때, y 의 값은 0보다 크거나 같다.

4. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동면 점 $(1,\ k)$ 를 지난다고 한다. k 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 12 ⑤ 27

해설

$y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동 한 함수의 식은
$y = 3(x+2)^2$ 이고, 점 $(1,\ k)$ 를 지나므로
$k = 3(1+2)^2$
$\therefore\ k = 27$

5. 이차함수 $y=-3(x-1)^2+2$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-1,\ k)$ 를 지난다. 이 때, k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=-3(-x-1)^2+2$
$y=-3(x+1)^2+2$
점 $(-1,\ k)$ 를 대입하면
$-3(-1+1)^2+2=k$
$\therefore k=2$

6. 이차함수 $y = x^2 - 4$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 두 점 $(-1, m)$, $(2, n)$ 에서 만날 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$y = x^2 - 4$ 의 그래프가 두 점 $(-1, m)$, $(2, n)$ 을 지나므로
$m = 1 - 4 = -3$, $n = 4 - 4 = 0$
$y = ax + b$ 에 두 점 $(-1, -3)$, $(2, 0)$ 을 대입하면

$$\begin{array}{rl} & -3 = -a + b \\ -) & 0 = 2a + b \\ \hline & -3 = -3a \end{array}$$

$a = 1$, $b = -2$
$\therefore a - b = 1 + 2 = 3$

7. 이차함수 $y = 3x^2 - 12x + 1$ 와 $y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치할 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

$y = 3x^2 - 12x + 1$
$= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 1$
$= 3(x - 2)^2 - 11$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2, -11)$ 이고,
$y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치하므로
$y = 2(x - 2)^2 - 11$
$= 2x^2 - 8x - 3$

이므로 $p = -8$, $q = -3$ 이다.
$\therefore p - q = -5$

8. 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 두 점 $(2,2),(-4,10)$ 을 지났다. $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2=\frac{1}{3}(x+2)^2+\frac{2}{3}$

x축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하면

$y=\frac{1}{3}(x+2-p)^2+\frac{2}{3}+q$

두 점 $(2,2),(-4,10)$ 을 대입하면

$2=\frac{1}{3}(4-p)^2+\frac{2}{3}+q$

$p^2-8p+3q=-12\cdots$㉠

$10=\frac{1}{3}(-2-p)^2+\frac{2}{3}+q$

$p^2+4p+3q=24\cdots$㉡

㉠ − ㉡ 에서 $p=3,\ q=1$

$\therefore p+q=3+1=4$

9. 이차함수 $y = 4x^2 + kx + 2$의 그래프의 꼭짓점이 $y = x - 1$의 그래프 위에 있고 $x > a$이면 y의 값이 증가하고, $x < a$이면 y의 값은 감소한다. 이 때 꼭짓점의 좌표를 구하여라. (단, $a < 0$)

① $(-1, -1)$ ② $(-1, -2)$ ③ $(1, 1)$

④ $(1, 2)$ ⑤ $(1, 3)$

해설

축의 방정식이 $x = a$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표가 a 이다.
따라서 $(a, a-1)$ 을 지나므로 $y = 4(x-a)^2 + a - 1 = 4x^2 - 8ax + 4a^2 + a - 1$ 이고 $4a^2 + a - 1 = 2$ 이다.
따라서 $(4a - 3)(a + 1) = 0$ 이므로 $a = -1 (a < 0)$ 이므로 꼭짓점은 $(-1, -2)$ 이다.

10. 포물선 $y = -2x^2 + 4x + 6$ 의 그래프와 x 축과의 교점을 A, B 라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2x^2 + 4x + 6$ 의 그래프와 x 축과의 교점은
$-2x^2 + 4x + 6 = 0$ 의 근과 같다.
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x-3)(x+1) = 0$
$x = 3$ 또는 $x = -1$
A(3, 0), B(−1, 0)
$\therefore \overline{AB} = 4$

11. 이차함수의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나는 것을 모두 고르면?

① $y = 4x^2 - 4x + 1$　② $y = x^2 - 3x + 2$

③ $y = 2x^2 + 3x + 4$　④ $y = -2x^2 + 4x - 3$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$

해설

② $D = 3^2 - 4 \times 2 > 0$

⑤ $D = (-1)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

12.

다항식 $x^n(x^2-ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $2^n(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

13. 이차함수 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동하면 점 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 을 지난다고 할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y=-\frac{1}{4}x^2+a$ 에 점 $\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 을 대입하면

$\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^2+a$

$\therefore a=1$

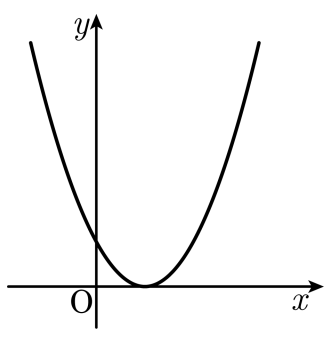
14. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 점 $(k, -3)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 곱하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$ ④ $-\frac{80}{3}$ ⑤ -10

해설

$y = -3x^2$ 을 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 $y = -3(x-5)^2 - 2$ 이고
$y = -3(x-5)^2 - 2$ 가 점 $(k, -3)$ 을 지나므로 대입하면 $-3 = -3(k-5)^2 - 2$, $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 이다.
상수 k 의 값의 곱은 $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 의 두 근의 곱과 같으므로 $\frac{74}{3}$ 이다.

15. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 이차함수 $y=p(x-q)^2+a$ 의 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?



① 제1, 2 사분면
② 제3, 4 사분면
③ 제1, 2, 4 사분면
④ 제2, 3, 4 사분면
⑤ 제1, 2, 3, 4 사분면

해설

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 는 아래로 볼록하고, 꼭짓점 (p,q) 가 x 축 위에 있으므로 $a>0,\ p>0,\ q=0$ 이다.
$y=p(x-q)^2+a$ 의 그래프는 아래 그래프와 같다.
따라서 이차함수 $y=p(x-q)^2+a$ 의 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2 사분면이다.

16. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - k$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x + 3$ 위에 있을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + 2x - k \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - 4) - k \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 - k \end{aligned}$$

꼭짓점 $(-2, \ -2-k)$ 가 $y = 2x + 3$ 의 위에 있으므로 $-2 - k = -4 + 3 \quad \therefore k = -1$

17. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

㉠ $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㉡ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

㉢ $y = 2x^2 - x$ ㉣ $-3(x+2)^2$

㉤ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

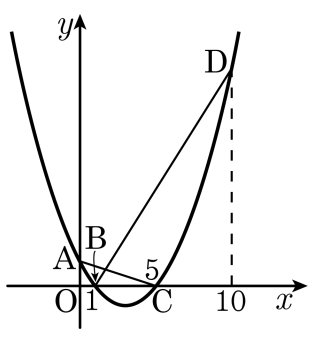
① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$ ③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
㉠ $\frac{3}{2}$ ㉡$\frac{1}{2}$ ㉢2 ㉣3 ㉤1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㉡, ㉤, ㉠, ㉢, ㉣ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로
④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

18. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106 ② 107 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5-1) \times c = 12$ 이다.

$c = 6$, 즉 A$(0, 6)$ 이다.

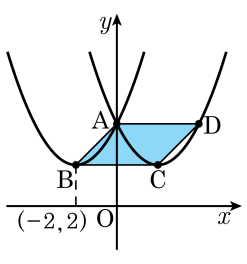
$y = ax^2 + bx + 6 = a(x-1)(x-5) = ax^2 - 6ax + 5a$ 이다.

$5a = 6$, $a = \frac{6}{5}$, $b = -\frac{36}{5}$ 이다.

$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6$ 이므로 D$(10, 54)$ 이다.

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 54 = 108$

19. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동 시킨 것이다. 이 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라. (단, 점 B와 C는 두 포물선의 꼭짓점이다.)



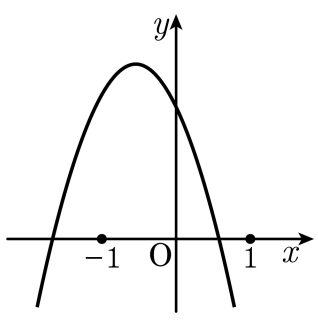
▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동 시키면 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$ 이다. 꼭짓점이 $(-2,\ 2)$에서 $(2,\ 2)$로 변하였고 점 A의 좌표는 $(0,\ 4)$이므로 평행사변형의 가로의 길이는 4 , 높이는 2이다. 따라서 넓이는 $4\times 2=8$ 이다.

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 구하면?



① $a > 0$ ② $b < 0$ ③ $c < 0$

④ $a + b + c > 0$ ⑤ $a - b + c < 0$

해설

① 위로 볼록하므로 $a < 0$
② 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 $ab > 0$
따라서 $b < 0$ 이다.
③ y 절편이 양수이므로 $c > 0$
④ $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c < 0$
⑤ $x = -1$ 일 때, $y = a - b + c > 0$