

1. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하고, $P \cap R = Q$ 인 관계가 성립한다고 할 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow \sim r$

③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

세 조건 p, q, r 의 진리집합이 $P \cap R = Q$ 인 관계를 성립하므로 $Q \subset P, Q \subset R$ 이다. 따라서, $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ 등이 참인 명제가 된다.

2. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

‘ n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.’

▶ 답 : 8 가지

▷ 정답 : 8 가 지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1, 6 \times 3, 6 \times 5, 6 \times 7, 6 \times 9, 6 \times 11, 6 \times 13, 6 \times 15\}$

3. 두 조건 $p: |x-k| \leq 1$, $q: -7 \leq x \leq 3$ 에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

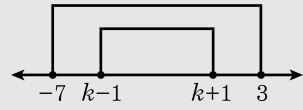
① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

해설

$p: |x-k| \leq 1$ 에서 $-1 \leq x-k \leq 1$

$\therefore k-1 \leq x \leq k+1 \cdots \text{㉠}$

$p \rightarrow q$ 가 참이면 ㉠이 $q: -7 \leq x \leq 3$ 에 포함되어야 한다.
수직선에 나타내면



$k-1 \geq -7 \therefore k \geq -6$

$k+1 \leq 3 \therefore k \leq 2$

따라서 k 의 최솟값은 -6, k 의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6 + 2 = -4$

4. 어떤 사건을 조사하는 과정에서 네 사람 A, B, C, D 중에서 한 명이 범인이라는 사실을 알았다. 용의자 네 명의 진술 중 옳은 것은 하나뿐일 때, 그 진술을 한 사람과 범인을 차례로 쓴 것은?

A : 범인은 B 이다.
 B : 범인은 D 이다.
 C : 나는 범인이 아니다.
 D : B 는 거짓말을 하고 있다.

- ① A, D ② B, C ③ C, B ④ D, C ⑤ B, A

해설

B 가 옳은 진술이라면 범인은 D 가 되고 C 도 옳은 진술이 된다. 그러나 진실을 말한 사람은 한 명뿐이기 때문에 B 는 거짓이 되고, D 가 옳은 진술이 된다. D 를 제외한 나머지 모두 거짓말이 되기 때문에 범인은 C 다.

5. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.’이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
 $n = (\text{가})$ 또는 $n = (\text{나})$ (단, k 는 음이 아닌 정수)로 가정할 수 있다.
 (i) $n = (\text{가})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{다}) + 1$
 (ii) $n = (\text{나})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{라}) + 1$
 이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
 (i), (ii)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

해설

3의 배수가 아닌 수들은 3으로 나뉘서 1 또는 2가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
 제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1인 자연수가 된다.
 따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

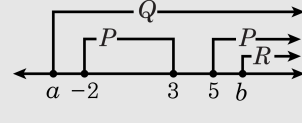
6. 실수 x 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같을 때, 두 명제 $p \Rightarrow q$ 와 $r \Rightarrow p$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

$$\begin{aligned} p &: -2 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 5 \\ q &: x \geq a \\ r &: x \geq b \end{aligned}$$

- ① 5 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 $R \subset P \subset Q$



$$a \leq -2, 5 \leq b$$

a 의 최댓값 -2 , b 의 최솟값 5

$$\therefore -2 + 5 = 3$$

7. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건, r 은 q 이기 위한 필요조건, s 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \rightarrow q$

② $q \rightarrow \sim p$

③ $s \rightarrow \sim q$

④ $\sim s \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim r \rightarrow p$

해설

$$p \rightarrow q \quad s \rightarrow \sim r \quad q \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r \text{의 대우} : \sim r \rightarrow \sim q$$

$$\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q \text{ 이므로 } s \rightarrow \sim q$$

8. 양수 a, b 가 $a + b = 1$ 을 만족시킬 때, 두 수 $P = a^3 + b^3, Q = a^2 + b^2$ 의 대소로 비교로 바른 것은?

① $P > Q$

② $P \geq Q$

③ $P = Q$

④ $P < Q$

⑤ $P \leq Q$

해설

a, b 는 양수이고 $a + b = 1$ 이므로

$$0 < a < 1, 0 < b < 1$$

또 $b = 1 - a$ 이므로

$$P = a^3 + b^3 = a^3 + (1 - a)^3$$

$$= a^3 + 1 - 3a + 3a^2 - a^3$$

$$= 3a^2 - 3a + 1$$

$$Q = a^2 + b^2 = a^2 + (1 - a)^2$$

$$= a^2 + a^2 - 2a + 1$$

$$= 2a^2 - 2a + 1$$

$$P - Q = 3a^2 - 3a + 1 - 2a^2 + 2a - 1$$

$$= a^2 - a = a(a - 1)$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 $a(a - 1) < 0$

$\therefore P - Q < 0$ 이고 $P < Q$

9. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

1, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$

- ① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ ② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$ ④ $\sqrt{b-a} < 1$
- ⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
 $\hspace{10em} = 2\sqrt{ab} > 0$

$\hspace{10em} (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > 1$
 $\hspace{10em} \therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
 $\hspace{10em} = (a+b) - b + a$
 $\hspace{10em} = 2a > 0$

$\hspace{10em} \therefore 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$
 $\hspace{10em} = b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
 $\hspace{10em} = 2\sqrt{ab} - 2a$
 $\hspace{10em} = 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$
 $\hspace{10em} \therefore \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

10. 네 개의 명제 p, q, r, s 가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

$\textcircled{\text{㉠}} \quad p \Rightarrow q$	$\textcircled{\text{㉡}} \quad \sim r \text{ 그리고 } p \Rightarrow \sim q$
$\textcircled{\text{㉢}} \quad \sim s \Rightarrow p \text{ 그리고 } \sim r$	$\textcircled{\text{㉣}} \quad \sim p \Rightarrow \sim s$

- ① p

② p, q

③ q, r
- ④ p, q, r

⑤ p, q, r, s

해설

$\textcircled{\text{㉡}} \sim r$ 그리고 $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow r$ 또는 $\sim p$
 $\textcircled{\text{㉣}} \sim p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$
 $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$ 에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. $\textcircled{\text{㉠}}$ 에서 p 가 참이면 q 가 참이고 $\textcircled{\text{㉡}}$ 에서 q 가 참이면 r 도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) $\textcircled{\text{㉢}}$ 에서 대우가 참이므로 s 도 참이다.
 $\therefore p, q, r, s$ 모두 참이다.

11. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?
- ① $\sqrt{3}$
 ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.
 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.
 ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

‘비둘기집의 원리’를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

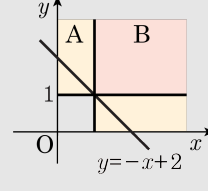
$$\text{대각선 길이} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다

12. x, y 가 실수일 때, 다음 조건 중에서 조건 A 가 조건 B 이기 위한 필요충분조건인 것은?
- ① $A : x + y > 2$ $B : x > 1$ 이고 $y > 1$
- ② $A : |x| + |y| = 0$ $B : \sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = 0$
- ③ $A : x + y > 0$ 이고 $xy > 0$ $B : x > 0$ 이고 $y > 0$
- ④ $A : xy > x + y > 4$ $B : x > 2$ 이고 $y > 2$
- ⑤ $A : x + y > 2$ $B : x > 2$ 또는 $y > 1$

해설

① 그림에서 이다. 즉, $B \subset A$ 이므로 A 는 B 이기 위한 필요조건



② $|x|+|y|=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=0 \Leftrightarrow x=0, y=0, 3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=0$ 을 만족시키는 x, y 는 $x=0, y=0$ 이외에도 $x=8, y=-8, \dots$ 등이 있다. $\therefore A \stackrel{\circ}{\bigcap}_{X} B$ (충분조건)

③ A는 x 축, y 축을 제외한 제1 사분면을 나타 내므로 B 와 동치이다.

④ $\therefore A \xrightleftharpoons[X]{O} B$ 이다. (필요조건) (반례) $x = 4, y = \frac{3}{2}$ 이다.

⑤ (충분조건) (반례) $x=3, y=-4$ 는 B 를 만족 시키지만 A 를

만족시키지 않는다. $\therefore A \not\stackrel{\circ}{\underset{\times}{\rightleftharpoons}} B$

13. 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=1$ 일 때 $ab+bc+ca$ 의 최댓값은?

① 1

② $\sqrt{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{9}$

⑤ $\frac{2}{11}$

해설

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 이므로

$ab + bc + ca$ 의 최댓값은 등호가 성립하는 경우이다.

또 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립하므로

$$a + b + c = 1 \text{에서 } a = b = c = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \geq ab + bc + ca$$

$\therefore ab + bc + ca$ 의 최댓값은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

14. $a \geq 1, b \geq 1$ 이고 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M \cdot m$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = 2^4\sqrt{ab}$
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ 이므로 $2^4\sqrt{ab} \leq 4$
 $\therefore \sqrt[4]{ab} \leq 2$
 $\therefore \sqrt{ab} \leq 4$
따라서, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$
($\because \sqrt{ab} \leq 4$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{4}$)
한편, $a \geq 1, b \geq 1$ 이므로
 $0 < \frac{1}{a} \leq 1, 0 < \frac{1}{b} \leq 1$
 $\therefore 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$
 $\therefore M = 2, m = \frac{1}{2}$
 $\therefore M \cdot m = 1$

15. a, b 가 양의 실수일 때, $a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 은 최솟값 A 를 가지며, 이 때의 a 의 값은 B 이다. A, B 에 알맞은 수를 차례로 구하면?

- ① 6, 1 ② $3 + \sqrt{2}$, 1 ③ $3, \frac{1}{2}$
 ④ $4, \frac{1}{2}$ ⑤ 4, 1

해설

$$\begin{aligned}
 a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}} &\geq 2\sqrt{a \cdot 4b} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (\text{등호는 } a = 4b \text{ 일 때}) \\
 &\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}}} \quad (\text{등호는 } 4\sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ 일 때}) = 4 \\
 \text{또, 등호는 } a &= 4b \text{ 이고 } 4\sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \text{ 일 때 성립하므로 } ab = \\
 \frac{1}{4}a^2 &= \frac{1}{4} \\
 \therefore a &= 1, b = \frac{1}{4} \\
 \text{따라서, } a &= 1, b = \frac{1}{4} \text{ 일 때 } a + 4b + \frac{1}{\sqrt{ab}} = 4
 \end{aligned}$$

16. 서로 다른 세 양수 p, q, r 에 대하여 $\frac{2}{p+q} + \frac{2}{q+r} + \frac{2}{r+p} \geq \frac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k 의 최댓값은?

- ① 2 ② 5 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q) + (q+r) + (r+p)$ 를 곱하면

$$6 + 2 \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq 2k$$
$$3 + \left\{ \left(\frac{q+r}{p+q} + \frac{r+p}{p+q} \right) + \left(\frac{p+q}{q+r} + \frac{r+p}{q+r} \right) + \left(\frac{p+q}{r+p} + \frac{q+r}{r+p} \right) \right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r 이 양수이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
(좌변)

$$\begin{aligned} &\geq 3 + 2 \sqrt{\frac{q+r}{p+q} \cdot \frac{p+q}{q+r}} + 2 \sqrt{\frac{r+p}{q+r} \cdot \frac{q+r}{r+p}} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{r+p}{p+q} \cdot \frac{p+q}{r+p}} \\ &= 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $p=q=r$ 일 때 성립)
따라서 k 의 최댓값은 9이다.

17. 두 조건 p, q 를 만족시키는 집합 $P = \{x \mid a < x < a + 1\}$, $Q = \left\{x \mid x + \frac{1}{x} \leq -2\right\}$ 에 대하여 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게하는 실수 a 의 최댓값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(i) $x < 0$ 이면

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0$$

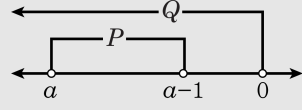
$$\therefore x + \frac{1}{x} \leq -2$$

(ii) $x > 0$ 이면

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ 이므로 Q 를 만족시키지 못한다.

(i), (ii)에 의하여 $Q = \{x \mid x < 0\}$

$\therefore P \subset Q$ 에서 $a + 1 \leq 0, a \leq -1$



따라서, $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

18. 네명의 피의자가 검사에게 다음과 같이 진술하였을때 한 사람의 진술만이 참일 경우의 범인과 한 사람의 진술만이 거짓일 경우의 범인을 차례대로 구하면 ?

A : ‘나는 범인이 아니다.’
B : ‘D가 범인이다.’
C : ‘D는 거짓말을 했다.’
D : ‘C가 범인이다.’

- ① A와 B

② A와 D

③ B와 A

④ D와 A

⑤ C와 D

해설

1) 한 사람의 진술만 참일 경우
C 가 참 : A가 범인이 된다.
D 가 참 : C, A 가 범인이 되어 모순
A 가 참 : D의 진술의 참 , 거짓이 모순
B 가 참 : D의 진술의 참, 거짓이 모순
∴ A 가 범인이다.

2) 한 사람의 진술만 거짓인 경우
A 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
B 가 거짓 : D의 진술의 참 거짓이 모순
C 가 거짓 : D, C가 범인이 되어 모순
D가 거짓 : D가 범인
따라서 D가 범인이다.

19. 민주, 한결, 은하, 겨레 4명의 학생은 각자가 적당한 시간에 봉사활동에 다녀오기로 하였으나 그 중 한명이 참석하지 못하였다. 그런데 네 명의 학생은 아래와 같이 서로 엇갈린 주장을 하고 있다. 이 진술 중 오직 하나만이 옳은 것일 때, 참석하지 못한 학생과 옳게 진술한 학생은?

민주: 한결이가 빠졌어.
한결: 민주가 한 말은 거짓말이야.
은하: 민주가 빠졌어.
겨레: 나는 안 빠졌어.

- ① 겨레, 한결
- ② 겨레, 민주
- ③ 겨레, 은하
- ④ 민주, 한결
- ⑤ 민주, 은하

해설

- ㉠ 민주가 참 : 한결, 겨레가 빠진것이 되어 모순
㉡ 한결이 참 : 겨레가 빠짐
㉢ 은하가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
㉤ 겨레가 참 : 민주의 진술에 대해 참, 거짓이 모순
∴ 한결의 진술이 참, 겨레가 참석하지 못함.

20. 어떤 심리학자가 사람의 상태를 A, B, C, D, E 의 다섯 가지 유형으로 분류하고 다음과 같은 가설을 세웠다.

- (i) A 형인 사람은 B 형이 아니다.
(ii) C 형이 아닌 사람은 B 형이 아니다.
(iii) C 형인 사람은 D 형이 아니다.
(iv) E 형인 사람은 B 형이다.

이 가설에 의하여 성립하지 않는 것을 보기에서 모두 고르면?

보기

- ☐ ㉠ A 형인 사람은 E 형이 아니다.
☐ ㉡ E 형인 사람은 C 형이 아니다.
☐ ㉢ E 형이면서도 D 형인 사람이 있다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

조건 A, B, C, D, E 가 각각 상태가 A, B, C, D, E 인 사람을 나타낼 때, 가설 (i), (ii), (iii), (iv) 를 명제로 표현하면 $A \Rightarrow \sim B, \sim C \Rightarrow \sim B, C \Rightarrow \sim D, E \Rightarrow B$ 이고, 대우를 각각 구해 보면
(i)의 대우 : B 형이면 A 형이 아니다.
즉, $B \Rightarrow \sim A$
(ii)의 대우 : B 형이면 C 형이다.
즉, $B \Rightarrow C$
(iii)의 대우 : D 형이면 C 형이 아니다.
즉, $D \Rightarrow \sim C$
(iv)의 대우 : B 형이 아니면 E 형이 아니다.
즉, $\sim B \Rightarrow \sim E$
 $E \Rightarrow B$ 이고 $B \Rightarrow \sim A$ 이므로 $E \Rightarrow \sim A$,
즉, $A \Rightarrow \sim E$
 $\sim C \Rightarrow \sim B$ 이고 $\sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $\sim C \Rightarrow \sim E$,
즉, $E \Rightarrow C$
 $D \Rightarrow \sim C, \sim C \Rightarrow \sim B, \sim B \Rightarrow \sim E$ 이므로 $D \Rightarrow \sim E$
따라서 보기 중에서 옳지 않은 것은 ㉡, ㉢ 이다.

21. 다음 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

- ㉠

$p : xy = |xy|, q : x > 0, y > 0$
- ㉡

$p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1, y > 1$
- ㉢

$p : xy = 0, q : |x - y| = |x + y|$
- ㉣

$p : |x| + |y| > |x + y|, q : x + y \geq 2$
- ㉤

$p : x \geq 1, y \geq 1, q : x + y \geq 2$
- ㉥

$p : x + y = 0, xy = 0, q : x = 0, y = 0$
- ㉦

$p : x + y\sqrt{2} = 0, q : x = y = 0$ (x, y 는 유리수)
- ㉧

$p : |x| = |y|, q : x^2 = y^2$

- ① 2 개
- ② 3 개
- ③ 4 개
- ④ 5 개
- ⑤ 6 개

해설

㉠ ㉡ ㉢ ㉣ ㉤ ㉥ ㉦ ㉧

22. 임의의 실수 x, y 에 대하여 항상 $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + ay + b > 0$ 이 성립할 때, a 의 값과 b 의 최소 정수값의 합을 구하면?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

x 에 대하여 정리하면 $x^2 + 2(y+2)x + y^2 + ay + b > 0 \cdots \textcircled{A}$

$\textcircled{A}$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 - (y^2 + ay + b) < 0$$

$$\therefore (4-a)y + 4-b < 0 \cdots \textcircled{B}$$

또, $\textcircled{B}$ 이 임의의 실수 y 에 대하여 성립해야 하므로

$$4-a=0, \quad 4-b<0$$

$$\therefore a=4, \quad b>4$$

$$a=4, \quad b \text{의 최소정수는 } 5$$

$$\therefore a + (b \text{의 최소정수값}) = 9$$

23. 실수 a, b, c 가 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 을 만족한다. $ab + bc + ca$ 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ -1

④ 1

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

a, b, c 가 실수이므로 $(a + b + c)^2 \geq 0$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq -2(ab + bc + ca) \cdots \textcircled{A}$$

$$\text{또한 } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \cdots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 이므로

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

$$\therefore M = 1, m = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore M + m = \frac{1}{2}$$

24. 양수 a, b 에 대하여 다음 식 $a^2 + b + \frac{16}{2a+b}$ 의 최솟값과 그 때의 a, b 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최솟값= 7

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b + \frac{16}{2a+b} \\ &= -1 + (a^2 - 2a + 1) + 2a + b + \frac{16}{2a+b} \\ &= -1 + (a-1)^2 + (2a+b + \frac{16}{2a+b}) \quad \dots \quad \textcircled{1} \\ & 2a+b + \frac{16}{2a+b} \geq 2\sqrt{(2a+b)(\frac{16}{2a+b})} = 8 \text{에서} \\ & \text{등호는 } 2a+b = \frac{16}{2a+b} \text{ 일 때 성립하고} \\ & \text{이때, } 2a+b = 4 \text{ (} a, b \text{는 양수)} \quad \dots \quad \textcircled{2} \\ & \textcircled{1} \text{에서 최소는 } a=1 \text{ 일 때이다.} \\ & \therefore \textcircled{2} \text{에서 } a=1, b=2 \text{ 일 때 최솟값 : 7} \end{aligned}$$