1. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다. ② (나) 1
③ (다) 자연수 ④ (라) 3 의 배수이다.
⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다}}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{\text{자연수}}$이므로 n^2 은 $\boxed{\text{3 의 배수가 아니다.}}$
그러므로 대우가 $\boxed{\text{참}}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{\text{참}}$이다.

2. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

> 주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다.
> (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다.
> 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x > 1$ 이고 $y > 1$, 1 , 참　② $x > 1$ 이고 $y > 1$, 2 , 참
③ $x > 1$ 또는 $y > 1$, 2 , 참　④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

3. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합 X 의 모든 원소의 합이 홀수일 때, 집합 X 의 개수는?

① 24 개 ② 32 개 ③ 40 개 ④ 48 개 ⑤ 56 개

해설

(X 의 모든 원소의 합이 홀수)→ X 의 원소 중 홀수의 개수가 홀수 개
ⅰ) 홀수의 개수가 1개 일 때 짝수로만 이루어진 부분집합에 1, 3, 5 중에 1개가 들어가면 된다. 짝수로만 이루어진 부분집합의 수 : $2^{6-3} = 8$ ∴ $8 \times 3 = 24$(개)
ⅱ) 홀수의 개수가 3개 일 때 $2^{6-3} = 8$ (개)
∴ $24 + 8 = 32$

4. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ A \subset B$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는?

① 50 개　② 55 개　③ 60 개　④ 65 개　⑤ 70 개

해설

원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합 개수는 2^n 이다.

i) $n(A) = 1$일 때
$A \subset B$ 이므로 $n(B) = 3$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$2^3 \times 4 = 32$
$(\because n(A) = 1$의 경우는 4가지이다)

ii) $n(A) = 2$일 때
$n(B) = 2$ 의 부분집합의 개수 $2^2 \times 6 = 24$
$(\because n(A) = 2$의 경우는 6가지이다)

iii) $n(A) = 3$일 때
$n(B) = 1$ 의 부분집합의 개수 $2^1 \times 4 = 8$
$(\because n(A) = 3$의 경우는 4가지이다)

iv) $n(A) = 4$일 때
$\{1, 2, 3, 4\}$ 의 1가지가 존재한다.

$\therefore 32 + 24 + 8 + 1 = 65$(개)

5. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$　② $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$
③ $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$　④ $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$
⑤ $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서
$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$일 때 성립)
그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$이므로
$\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

6. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b| \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

② $\sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b|$

③ $|a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

④ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \le |a|+|b|$

⑤ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

해설

$|a|>0,\ |b|>0$이므로

$\dfrac{|a|+|b|}{2} \ge \sqrt{|a||b|} \ge \dfrac{2|a||b|}{|a|+|b|}$

$\therefore \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \cdots$ ㉠

한편 $(\sqrt{2(a^2+b^2)})^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \ge 0$

$\therefore (\sqrt{2(a^2+b^2)})^2 \ge (|a|+|b|)^2$

$\therefore |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \le |a|+|b| \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$

7. $a>0,\ b>0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)=10+\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}$

산술기하조건을 사용하면

$\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{16a}{b}}=8$

$\therefore$ 최솟값은 $10+8=18$

8. $a,\ b$가 양의 실수일 때, $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 A를 가지며, 이 때의 a의 값은 B이다. $A,\ B$에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$　　② $3+\sqrt{2},\ 1$　　③ $3,\ \dfrac{1}{2}$

④ $4,\ \dfrac{1}{2}$　　⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a\cdot 4b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ 일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때 성립하므로 $ab=\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$

따라서, $a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$일 때 $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=4$

9. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

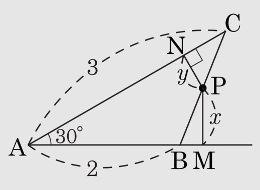
$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

10. $\angle A = 30°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$인 삼각형 ABC에서 변 BC 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은?

① $\dfrac{25}{4}$ ② $\dfrac{25}{3}$ ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ 25 ⑤ 35

해설



$\overline{PM} = x$, $\overline{PN} = y$라 하면

$\triangle APB + \triangle APC = \triangle ABC$이므로

$\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot y = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 30°$

$\therefore\ 2x + 3y = 3$

$x > 0$, $y > 0$이므로

$\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}\right) \cdot (2x + 3y) = 13 + 6\left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}\right)$

$\geq 13 + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{x}{y}}$

$\therefore\ \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y}\right) \times 3 \geq 13 + 12 = 25$

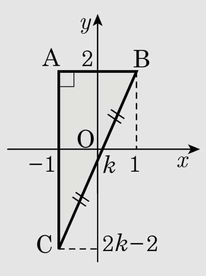
$\therefore\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} \geq \dfrac{25}{3}$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\dfrac{25}{3}$

11. 점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B , 점 B 를 점 $(0, k)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라고 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이다. 이 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설



점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여
대칭이동한 점 B $(1, 2)$ 이고,
점 C (x, y) 라고 하면
$\overline{BC}$ 의 중점이 $(0, k)$ 이므로

$\dfrac{1+x}{2} = 0,\ \dfrac{2+y}{2} = k$

$\therefore x = -1,\ y = 2k - 2$

$\therefore$ C $(-1,\ 2k-2)$

이 때, 삼각형 ABC 는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형이고
$\overline{AB} = 1 - (-1) = 2, \overline{AC} = |2k - 4|$ 이므로
삼각형 ABC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot |2k - 4| = |2k - 4|$

그런데 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

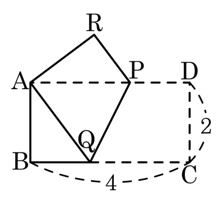
$|2k - 4| = 6$

$2k - 4 = 6$ 또는 $2k - 4 = -6$

$\therefore k = 5$ 또는 $k = -1$

따라서, 모든 실수 k 의 값의 합은 4 이다.

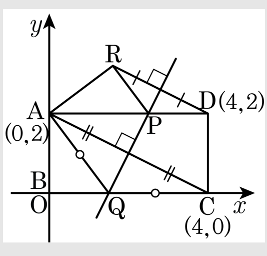
12. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $4, 2$ 인 직사각형 모양의 종이 ABCD 를 접어서 대각선의 양 끝점 A 와 C 가 겹쳐지도록 하였다. 이 때, 선분 BR 의 길이를 구하면?



① $8\sqrt{5}$　② $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$　③ $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$
④ $\dfrac{8\sqrt{5}}{7}$　⑤ $\dfrac{8\sqrt{5}}{9}$

해설

다음 그림과 같이 점 B 가 원점이 되도록 사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 나타내면



A$(0,2)$, B$(0,0)$, C$(4,0)$, D$(4,2)$
이 때, 두 점 A, C 와 두 점 D, R 는
각각 직선 PQ 에 대하여 대칭이다.
따라서 직선 PQ 는 직선 AC 와 수직이고,
직선 AC 의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$ 이므로
직선 PQ 의 기울기는 2 이다.
또한, 직선 PQ 는 선분 AC 의 중점 $(2,1)$ 을 지난다.
따라서, 직선 PQ 의 방정식은 $y-1=2(x-2)$,
즉 $y=2x-3$
결국 점 D$(4,2)$ 를 직선 $y=2x-3$ 에 대하여
대칭이동한 점이 R 이다.
이 때, R(a,b) 라고 하면
직선 DR과 직선 $y=2x-3$ 이 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-4}\cdot 2=-1$$

$\therefore a+2b=8 \cdots\cdots$ ㉠

또한, 선분 DR 의 중점 $\left(\dfrac{a+4}{2}, \dfrac{b+2}{2}\right)$ 는
직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-3$$

$\therefore 2a-b=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{8}{5}, b=\frac{16}{5}$$

$\therefore$ R$\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$

$$\therefore \overline{BR}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{256}{25}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

13. 점 $(1, 2)$ 를 직선 $y = 2x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, 실수 a, b 에 대하여 $5(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1 + a}{2}, \frac{2 + b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y = 2x + 1$ 위의 점이므로

$\frac{2 + b}{2} = 2 \cdot \frac{1 + a}{2} + 1$

$\therefore 2a - b = -2 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또한, 두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 지나는 직선이

직선 $y = 2x + 1$ 과 수직이므로

$\frac{b - 2}{a - 1} = -\frac{1}{2}$

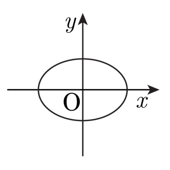
$\therefore\ a + 2b = 5 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉡

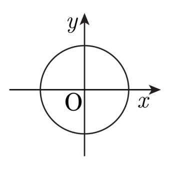
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

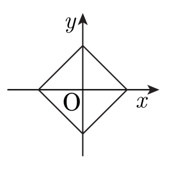
$a = \frac{1}{5},\ b = \frac{12}{5}$

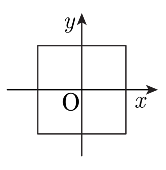
따라서, $5(a + b) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{12}{5}\right) = 5 \cdot \frac{13}{5} = 13$

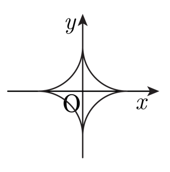
14. 좌표평면에서 점 $(2,0)$ 의 직선 $y=2mx$ 에 대한 대칭점을 P 라 한다. m 이 임의의 실수값을 가지며 변할 때, 점 P 의 자취로 가장 적절한 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$P=(X,Y)$ 라 하면, $(2,0)$ 과 P 를 잇는 선분은 $y=2mx$ 에 수직하고
점 $(2,0)$ 과 P 의 중점은 $y=2mx$ 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{Y}{X-2}\times 2m=-1, \quad \dfrac{Y}{2}=2m(\dfrac{X+2}{2})$

$\Rightarrow \quad m=\dfrac{2-X}{2Y} \quad \cdots$ ㉠, $\quad Y=2mX+4m \quad \cdots$ ㉡

$\Rightarrow$ ㉠을 ㉡ 에 대입하면,

$2Y^2=-2X^2+4X-4X+8$

$\Rightarrow \quad X^2+Y^2=4$

15. 두 점 $\mathrm{A}(3, 4), \mathrm{B}(2, 5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ −1 ④ 3 ⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$

선분AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

선분AB 의 기울기 : $\frac{4-5}{3-2} = -1$

따라서, $a = 1$

$5 \cdot 1 + 2b = 9$

$\therefore\ 2b = 4 \quad \therefore\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 1 + 2 = 3$

16. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$의 중심을 A라 하고, 이 원을 직선 $l : 2x - y - 6 = 0$에 대하여 대칭 이동하였을 때, 이동된 원의 중심을 B라 하고, 직선 l의 y절편을 C라 할 때, 세 점 A, B, C에 의하여 만들어지는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
④ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

해설

원의 방정식을 정리하면,
$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ 중심 : $\mathrm{A} = (2, 3)\mathrm{B} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$라 하면,
$\overline{\mathrm{AB}}$는 l에 수직하고, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점은 l위에 있다.
i) 기울기 : $\frac{3-b}{2-a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b = 8$
ii) $2 \times \left(\frac{a+2}{2}\right) - \left(\frac{3+b}{2}\right) - 6 = 0$
$\Rightarrow \quad 2a - b = 11$
i) 과 ii)를 연립하면,
$a = 6 \quad b = 1$
$\therefore \mathrm{B} = (6, 1)$
l의 절편 : $\mathrm{C} = (0, -6)$
$\therefore \quad \triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심 :
$\left(\frac{2+6+0}{3}, \frac{3+1+(-6)}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$