1. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 'n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.' 를 증명한 것이다.

> 주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{(가)}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{(나)}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
> 따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{(다)}$ 이므로 n^2 은 $\boxed{(라)}$ 그러므로 대우가 $\boxed{(마)}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{(마)}$이다.

위의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?

① (가) 3 의 배수가 아니다. ② (나) 1
③ (다) 자연수 ④ (라) 3 의 배수이다.
⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 $\boxed{3 의 배수가 아니다}$' 이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n = 3m \pm \boxed{1}$ (m 은 자연수) 에서 $n^2 = 9m^2 \pm 6m + 1 = 3\left(3m^2 \pm 2m\right) + 1$
따라서, $3m^2 \pm 2m$ 이 $\boxed{자연수}$이므로 n^2 은 $\boxed{3 의 배수가 아니다.}$
그러므로 대우가 $\boxed{참}$이므로 주어진 명제도 $\boxed{참}$이다.

2. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가)이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다. (가)에서 $x^2+y^2>$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다. 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다)이다.

① $x>1$ 이고 $y>1$, 1, 참
② $x>1$ 이고 $y>1$, 2, 참
③ $x>1$ 또는 $y>1$, 2, 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1, 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2, 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$의 부정은 $x>1$ 이고 $y>1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

3. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합 X 의 모든 원소의 합이 홀수일 때, 집합 X 의 개수는?

① 24 개　② 32 개　③ 40 개　④ 48 개　⑤ 56 개

해설

(X 의 모든 원소의 합이 홀수)→ X 의 원소 중 홀수의 개수가 홀수 개

ⅰ) 홀수의 개수가 1개 일 때 짝수로만 이루어진 부분집합에 1, 3, 5 중에 1개가 들어가면 된다. 짝수로만 이루어진 부분집합의 수 : $2^{6-3} = 8 \therefore\ 8 \times 3 = 24$(개)

ⅱ) 홀수의 개수가 3개 일 때 $2^{6-3} = 8$ (개)

$\therefore\ 24 + 8 = 32$

4. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing,\ A \subset B$ 를 만족하는 두 집합 $A,\ B$ 의 순서쌍 $(A,\ B)$ 의 개수는?

① 50 개 ② 55 개 ③ 60 개 ④ 65 개 ⑤ 70 개

해설

원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합 개수는 2^n 이다.

i) $n(A)=1$일 때

$A \subset B$ 이므로 $n(B)=3$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$2^3 \times 4 = 32$

$(\because n(A)=1$의 경우는 4가지이다)

ii) $n(A)=2$일 때

$n(B)=2$ 의 부분집합의 개수 $2^2 \times 6 = 24$

$(\because n(A)=2$의 경우는 6가지이다)

iii) $n(A)=3$일 때

$n(B)=1$ 의 부분집합의 개수 $2^1 \times 4 = 8$

$(\because n(A)=3$의 경우는 4가지이다)

iv) $n(A)=4$일 때

$\{1, 2, 3, 4\}$ 의 1가지가 존재한다.

$\therefore 32+24+8+1=65($ 개$)$

5. 서로 다른 두 양수 $a,\ b$ 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ ② $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

③ $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$ ④ $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \dfrac{2ab}{a+b}$

⑤ $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

해설

$a>0$, $b>0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a=b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \dfrac{2ab}{a+b}$

6. 다음 부등식 중 옳은 것을 고르면? (단, a, b는 0이 아닌 실수)

① $\sqrt{2(a^2+b^2)} \leq |a|+|b| \leq \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

② $\sqrt{2(a^2+b^2)} \leq \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \leq |a|+|b|$

③ $|a|+|b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \leq \dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|}$

④ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \leq |a|+|b|$

⑤ $\dfrac{4|a||b|}{|a|+|b|} \leq |a|+|b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

해설

$|a|>0,\ |b|>0$이므로

$$\frac{|a|+|b|}{2} \geq \sqrt{|a||b|} \geq \frac{2|a||b|}{|a|+|b|}$$

$$\therefore \frac{4|a||b|}{|a|+|b|} \leq |a|+|b| \cdots ㉠$$

한편 $\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \geq 0$

$\therefore \left(\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)^2 \geq (|a|+|b|)^2$

$\therefore |a|+|b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여

$$\frac{4|a||b|}{|a|+|b|} \leq |a|+|b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

7. $a>0,\ b>0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)=10+\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}$$

산술기하조건을 사용하면

$$\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{16a}{b}}=8$$

$\therefore$ 최솟값은 $10+8=18$

8. $a,\ b$가 양의 실수일 때, $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$은 최솟값 A를 가지며, 이 때의 a의 값은 B이다. $A,\ B$에 알맞은 수를 차례로 구하면?

① $6,\ 1$ ② $3+\sqrt{2},\ 1$ ③ $3,\ \dfrac{1}{2}$

④ $4,\ \dfrac{1}{2}$ ⑤ $4,\ 1$

해설

$a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{a\cdot 4b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ (등호는 $a=4b$일 때)

$\geq 2\sqrt{4\sqrt{ab}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}}$ (등호는 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때)$=4$

또, 등호는 $a=4b$이고 $4\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$일 때 성립하므로 $ab=$

$\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$

따라서, $a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$일 때 $a+4b+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=4$

9. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.

$2(x+y)=16 \quad x+y=8$

산술기하평균을 사용하면,

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$

$4 \geq \sqrt{xy}$

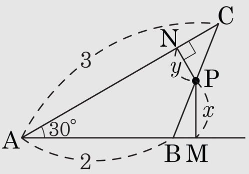
$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

10. $\angle A = 30°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$인 삼각형 ABC에서 변 BC 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은?

① $\dfrac{25}{4}$ ② $\dfrac{25}{3}$ ③ $\dfrac{25}{2}$ ④ 25 ⑤ 35

해설



$\overline{PM} = x$, $\overline{PN} = y$라 하면

$\triangle APB + \triangle APC = \triangle ABC$이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot y = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin 30°$$

$\therefore\ 2x + 3y = 3$

$x > 0,\ y > 0$이므로

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)\cdot(2x+3y) = 13 + 6\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)$$

$$\geq 13 + 6\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}$$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)\times 3 \geq 13 + 12 = 25$$

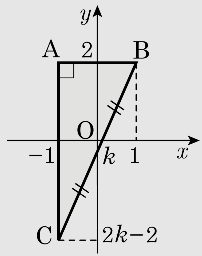
$$\therefore\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} \geq \frac{25}{3}$$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{PM}} + \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PN}}$의 최솟값은 $\dfrac{25}{3}$

11. 점 A$(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B , 점 B 를 점 $(0, k)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라고 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이다. 이 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설



점 A$(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여
대칭이동한 점 B$(1, 2)$ 이고,
점 C(x, y) 라고 하면
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점이 $(0, k)$ 이므로

$$\frac{1+x}{2} = 0,\ \frac{2+y}{2} = k$$

$\therefore x = -1,\ y = 2k - 2$

$\therefore \mathrm{C}(-1,\ 2k-2)$

이 때, 삼각형 ABC 는 $\angle \mathrm{A} = 90°$ 인 직각삼각형이고
$\overline{\mathrm{AB}} = 1 - (-1) = 2, \overline{\mathrm{AC}} = |2k - 4|$ 이므로
삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |2k - 4| = |2k - 4|$$

그런데 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

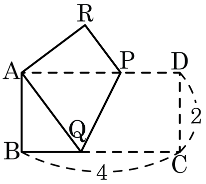
$|2k - 4| = 6$

$2k - 4 = 6$ 또는 $2k - 4 = -6$

$\therefore k = 5$ 또는 $k = -1$

따라서, 모든 실수 k 의 값의 합은 4 이다.

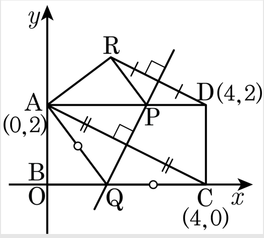
12. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 $4, 2$ 인 직사각형 모양의 종이 ABCD 를 접어서 대각선의 양 끝점 A 와 C 가 겹쳐지도록 하였다. 이 때, 선분 BR 의 길이를 구하면?



① $8\sqrt{5}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{8\sqrt{5}}{7}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{9}$

해설

다음 그림과 같이 점 B 가 원점이 되도록 사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 나타내면



$A(0,2), B(0,0), C(4,0), D(4,2)$
이 때, 두 점 A, C 와 두 점 D, R 는
각각 직선 PQ 에 대하여 대칭이다.
따라서 직선 PQ 는 직선 AC 와 수직이고,
직선 AC 의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로
직선 PQ 의 기울기는 2 이다.
또한, 직선 PQ 는 선분 AC 의 중점 $(2,1)$ 을 지난다.
따라서, 직선 PQ 의 방정식은 $y-1=2(x-2)$,
즉 $y=2x-3$
결국 점 $D(4,2)$ 를 직선 $y=2x-3$ 에 대하여
대칭이동한 점이 R 이다.
이 때, $R(a,b)$ 라고 하면
직선 DR과 직선 $y=2x-3$ 이 수직이므로
$\frac{b-2}{a-4}\cdot 2=-1$
$\therefore a+2b=8 \cdots\cdots$ ㉠
또한, 선분 DR 의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 는
직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로
$\frac{b+2}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-3$
$\therefore 2a-b=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=\frac{8}{5}, b=\frac{16}{5}$
$\therefore R\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$
$\therefore \overline{BR}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{256}{25}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

13. 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$$

$\therefore 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉠

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이 직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$$

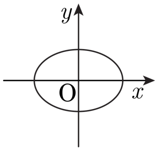
$\therefore\ a+2b=5 \quad \cdots\cdots\cdots$ ㉡

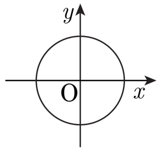
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

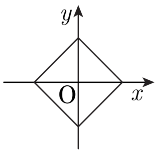
$$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$$

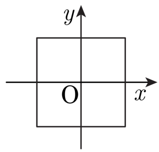
따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

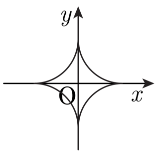
14. 좌표평면에서 점 $(2, 0)$ 의 직선 $y = 2mx$ 에 대한 대칭점을 P 라 한다. m 이 임의의 실수값을 가지며 변할 때, 점 P 의 자취로 가장 적절한 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$P = (X, Y)$ 라 하면, $(2, 0)$ 과 P 를 잇는 선분은 $y = 2mx$ 에 수직하고

점 $(2, 0)$과 P 의 중점은 $y = 2mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \quad \frac{Y}{X-2} \times 2m = -1, \quad \frac{Y}{2} = 2m\left(\frac{X+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{2-X}{2Y} \quad \cdots \quad ㉠, \quad Y = 2mX + 4m \quad \cdots \quad ㉡$$

$\Rightarrow$ ㉠을 ㉡ 에 대입하면,

$$2Y^2 = -2X^2 + 4X - 4X + 8$$

$$\Rightarrow \quad X^2 + Y^2 = 4$$

15. 두 점 $A(3,4), B(2,5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$

선분AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

선분AB 의 기울기 : $\frac{4-5}{3-2} = -1$

따라서, $a = 1$

$5 \cdot 1 + 2b = 9$

$\therefore\ 2b = 4 \quad \therefore\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 1 + 2 = 3$

16. 원 $x^2+y^2-4x-6y+9=0$의 중심을 A라 하고, 이 원을 직선 $l: 2x-y-6=0$에 대하여 대칭 이동하였을 때, 이동된 원의 중심을 B라 하고, 직선 l의 y절편을 C라 할 때, 세 점 A, B, C에 의하여 만들어지는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
④ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

해설

원의 방정식을 정리하면,

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 중심 :$\mathrm{A}=(2,3)\mathrm{B}=(\mathrm{a},\mathrm{b})$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$는 l에 수직하고, $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점은 l위에 있다.

i) 기울기 : $\frac{3-b}{2-a}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow a+2b=8$

ii) $2\times\left(\frac{a+2}{2}\right)-\left(\frac{3+b}{2}\right)-6=0$

$\Rightarrow \quad 2a-b=11$

i)과 ii)를 연립하면,

$a=6 \quad b=1$

$\therefore \mathrm{B}=(6,1)$

l의 절편 : $\mathrm{C}=(0,-6)$

$\therefore$ $\triangle$ABC의 무게중심 :

$$\left(\frac{2+6+0}{3}, \frac{3+1+(-6)}{3}\right)=\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$