1. 원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$　② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$　④ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$은 중심이 $(3,\ 0)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
원의 중심 $(3,\ 0)$ 을 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여
대칭이동한 점을 $(a,\ b)$ 라 하면
$\frac{3+a}{2} = 2,\ \frac{0+b}{2} = 1$
$\therefore\ a = 1,\ b = 2$
원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는
그대로이므로 구하는 원은 중심이 $(1,\ 2)$ 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
$\therefore\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

2. 다음 중 공집합인 것은?

① $\{x|x$는 분모가 7인 기약분수$\}$

② $\{x|x$는 9의 배수 중 짝수$\}$

③ $\{x|x$는 11 미만의 홀수$\}$

④ $\{x|1 < x \leq 2,\ x$는 자연수$\}$

⑤ $\{x|x$는 1보다 작은 자연수$\}$

해설

① $\left\{\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \cdots\right\}$

② $\{18,\ 36,\ 54,\ \cdots\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

④ $\{2\}$

3. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a+1\}$, $B=\{1,\ b,\ 7\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$A=B$ 이므로 $b=2$, $a+1=7$, $a=6$

$\therefore\ a+b=8$

4. 집합 $A = \{x \mid |x-1| = 1\}$, $B = \{x \mid 2x - 1 < 9\}$, $C = \{x \mid -3 < x < 3\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$

④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset A \subset B$

해설

$|x-1| = 1, x-1 = \pm 1$ 이므로 $x = 0, 2$

$\therefore A = \{0, 2\}$

$B = \{x \mid 2x - 1 < 9\} = \{x \mid 2x < 10\} = \{x \mid x < 5\}$

$C = \{x \mid -3 < x < 3\}$

$\therefore A \subset C \subset B$

5. 집합 $A = \{1, 2, 4, 6\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수는?

① 9 개　② 11 개　③ 13 개　④ 15 개　⑤ 17 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로,
진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1개가 적다.
따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$
(개) 이다.

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ 에 대하여 $B \cup X = X$를 만족시키는 A의 부분집합 X의 개수를 구하시오.

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

$B \subset X$이므로 X는 1, 2를 반드시 포함하여 $2^{6-2} = 2^4 = 16$(개)가 된다.

7. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=4x+a$에 대하여 $(g\circ f)(x)=12x+7$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$f(x)=3x+1,\ g(x)=4x+a$ 이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(3x+1)\\&=4(3x+1)+a\\&=12x+4+a\end{aligned}$$

따라서 $12x+4+a=12x+7$ 에서 $4+a=7$

$\therefore\ a=3$

8. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 을 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=6$

해설

원의 중심 $(1,-2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로
5 평행 이동시키면, $(1,-2) \rightarrow \quad (3,3)$
$\therefore a=3, b=3, a+b=6$

9. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 25 미만의 5의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 $13 < x < 15$인 홀수$\}$일 때, $n(A) - n(B)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$, $B = \varnothing$ 이므로

$n(A) - n(B) = 4 - 0 = 4$

10. 전체집합 U 의 부분집합 A 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap A^c = \phi$　② $A \cup U = U$　③ $\phi^c = U$

④ $A \cap U = U$　⑤ $(A^c)^c = A$

해설

$A \cap U = A$

11. 함수 f가 임의의 두 양수 $x,\ y$에 대하여 $f(xy)=f(x)+f(y)$를 만족하고 $f(2)=1$일 때, $f\left(\frac{1}{8}\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

임의의 두 양수 $x,\ y$에 대하여
$f(xy)=f(x)+f(y)$ ……㉠이므로
㉠에 $x=1,\ y=1$을 대입하면
$f(1)=f(1)+f(1)$ $\therefore f(1)=0$
$x=2,\ y=2$를 대입하면
$f(4)=f(2)+f(2)=1+1=2$ $\Leftarrow f(2)=1$
$x=4,\ y=2$를 대입하면
$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$
$x=8,\ y=\frac{1}{8}$을 대입하면
$f(1)=f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)$
$0=3+f\left(\frac{1}{8}\right)$
$\therefore\ f\left(\frac{1}{8}\right)=-3$

12. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)\\
&=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z\\
&=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)\\
&=(z-y)\{x^2-(z+y)x+zy\}\\
&=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)
\end{aligned}$$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

13. 등식 $\dfrac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{c}{x-3}$ 이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c에 대하여 abc의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로
양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$을 곱하면
$x^2+1=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)$
양변에 $x=1$을 대입하면 $2=2a$
$\therefore\ a=1$
양변에 $x=2$를 대입하면 $5=-b$
$\therefore\ b=-5$
양변에 $x=3$을 대입하면 $10=2c$
$\therefore\ c=5$
$\therefore\ abc=-25$

14. $\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}=\dfrac{16}{a+b}$ 일 때, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{8}{3}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{14}{3}$ ④ $\dfrac{16}{3}$ ⑤ $\dfrac{17}{3}$

해설

$\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}=\dfrac{16}{a+b}$, $\dfrac{3(a+b)}{ab}=\dfrac{16}{a+b}$

$3(a+b)^2=16ab \quad \therefore\ 3a^2-10ab+3b^2=0$

$(3a-b)(a-3b)=0 \quad \therefore\ \dfrac{b}{a}=3,\ \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

15. 0이 아닌 실수 x, y가 $\dfrac{x-y}{4x+2y}=\dfrac{1}{3}$을 만족할 때, 유리식 $\dfrac{x^2-5y^2}{2xy}$의 값은?

① -2 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$\dfrac{x-y}{4x+2y}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3x-3y=4x+2y \quad x=-5y$

$\therefore \dfrac{x^2-5y^2}{2xy}=\dfrac{20y^2}{-10y^2}=-2$

16. $a+b+c \neq 0$일 때, $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

해설

$a+b+c \neq 0$이므로 가비의 리를 적용하면

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}$$
$$=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$$

17. $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$를 만족하는 서로 다른 양수 x, y, z에 대하여 $\frac{x}{y}$는? (단, $x+y\neq 0$)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

해설

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$이고

$b+d+f\neq 0$이면 $\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$($\because$가비의 리)

이것을 이용하면

$\frac{x}{y}=\frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y}=\frac{2(x+y)}{x+y}=2$

18. $a : b = c : d$일 때 다음 등식 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$
② $\dfrac{a+d}{a-d} = \dfrac{b+c}{b-c}$
③ $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$
④ $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$
⑤ $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

해설

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ 에서

$\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \cdots ㉠$

$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \cdots ㉡$

㉡ ÷ ㉠하면

$\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ 에서

$\dfrac{a-c}{c} = \dfrac{b-d}{d} \cdots ㉢$

$\dfrac{a+c}{c} = \dfrac{b+d}{d} \cdots ㉣$

㉣ ÷ ㉢하면

$\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ 에서 가비의 리를 이용하면

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

$\therefore \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

19. x km인 길을 왕복하는데 갈 때는 a km/h, 올 때는 b km/h의 속력으로 걸었다. 이때, 평균속력은?

① $\dfrac{x}{a+b}$ ② $\dfrac{a+b}{x}$ ③ $x(a+b)$
④ $\dfrac{2ab}{a+b}$ ⑤ $\dfrac{2(a+b)}{ab}$

해설

$$\frac{2x}{\frac{x}{a}+\frac{x}{b}} = \frac{2x}{\frac{(a+b)x}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

20. 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 18\}$ 를 조건제시법으로 올바르게 나타낸 것을 모두 골라라.

㉠ $A = \{x \mid 0 \le x \le 18$인 정수$\}$
㉡ $A = \{x \mid 1 < x \le 17$인 짝수$\}$
㉢ $A = \{x \mid x$는 20보다 작은 짝수$\}$
㉣ $A = \{x \mid x$는 18 이하의 짝수$\}$
㉤ $A = \{x \mid x$는 19 미만의 짝수$\}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉢

▷ 정답: ㉣

▷ 정답: ㉤

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots,\ 18\}$
$= \{x \mid x$는 20보다 작은 짝수$\}$
$= \{x \mid x$는 19 미만의 짝수$\}$
$= \{x \mid x$는 18 이하의 짝수$\}$

21. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

보기

$A \subset C$, $B \subset C$, $C \subset E$, $D \subset E$

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다.

② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다.

③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다.

④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다.

⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다.

해설

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다. → $D \subset B$, $B \not\subset D$ 일 수 있다.
④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다. → $E \subset D$ 이면, $D = E$ 이고 $A \subset E$ 이므로 $A \subset D$ 이다.
⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다. → $B = C = E$ 일 수 있다.

22. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32 개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} 개이다.

$2^{n-3} = 32,\ 2^{n-3} = 2^5$

$n - 3 = 5$ 이므로 $n = 8$

23. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기의 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 골라라.

보기

$$A^C - B^C = A^C \cap (B^C)^C = A^C \cap B = B - A = (A \cup B) - B$$
$$\text{㉠} \qquad \text{㉡} \qquad \text{㉢} \qquad \text{㉣}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

$B-A = (A \cup B)-A$ 이다. 따라서 잘못된 곳은 ㉣ $B-A = (A \cup B)-B$ 이다.

24. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때 $(A-B)\cup X=X$, $(A\cup B)\cap X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A=\{x\|x$는 8의 약수$\}$, $B=\{x\|x$는 5이하의 홀수$\}$

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

$(A-B)\cup X=X$ 이므로 $(A-B)\subset X$
$(A\cup B)\cap X=X$ 이므로 $X\subset(A\cup B)$,
$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}, B=\{1,\ 3,\ 5\}$
$\{2,4,8\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5,8\}$
집합 X 는 집합$A\cup B$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 8을 반드시 포함하는 집합이다.
$\therefore\ 2^{6-3}=2^3=8$ (개)

25. 평행이동 $f:(x,y)\to(x+a,\ x+b)$ 에 의해 점 $(1,2)$ 가 점 $(-1,4)$ 으로 옮겨질 때, 평행이동 f 에 의해 원점으로 옮겨지는 점의 좌표는?

① $(2,-2)$ ② $(2,2)$ ③ $(2,0)$

④ $(-2,2)$ ⑤ $(4,2)$

해설

$(1+a,2+b)=(-1,4)$

$\Rightarrow\quad a=-2,\quad b=2$

$\therefore\quad (x+2,y+2)=(0,0)$

$\Rightarrow\quad x=2,\quad y=-2$

$\Rightarrow\quad (2,-2)$

26. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x(x \neq 1)$ 를 만족할 때 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 식은?

① $\frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$ ② $\frac{x+1}{x-2}(x \neq 2)$ ③ $\frac{x-1}{x-2}(x \neq -1)$
④ $\frac{x+2}{x+1}(x \neq -1)$ ⑤ $\frac{x+2}{x-1}(x \neq 1)$

해설

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2x$ 에서

$\frac{x+1}{x-1} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{t+1}{t-1}$

$\therefore f(t) = \frac{2(t+1)}{t-1}$, $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$

$y = \frac{2(x+1)}{x-1}$ 이면

$yx - y = 2x + 2$ 에서 $x = \frac{y+2}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}(x \neq 2)$

27. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x)=x^2+2x$, $h(x)=\dfrac{100x+200}{f(x)}$에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h\circ g)(8)$ 의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$g(8)=k$ 라고 하면 $f(k)=8$ 이다.

$\Rightarrow k^2+2k=8$

$\Rightarrow k=-4, 2 \Rightarrow k=2(\because\ k>0)$

$\therefore\ (h\circ g)(8)=h(g(8))=h(2)$

$=\dfrac{100\times 2+200}{f(2)}=50$

28. $a : b = c : d$일 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $abcd \neq 0$, $b+2d \neq 0$, $a-2b \neq 0$, $c-3d \neq 0$이다.)

보기

㉠ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$　　㉡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d}$

㉢ $\dfrac{a+2b}{a-2b} = \dfrac{c+3d}{c-3d}$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \cdots$ 참

㉡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+2c}{b+2d} \Rightarrow a(b+2d) = b(a+2c)$

$2ad = 2bc,\ ad = bc \cdots$ 참

㉢ $(a+2b)(c-3d) = (c+3d)(a-2b)$

$4bc = 6ad \cdots$ 거짓

29. 두 원 $x^2-2x+y^2-4y+4=0$, $x^2-6x+y^2-2y+9=0$ 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이 될 때, ab 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

두 원의 방정식은 각각 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 이므로

두 원의 중심 (1, 2), (3, 1) 이 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이 되어야 한다.

즉, $\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$

$\frac{1-2}{3-1}\times a=-1$

$\therefore\ a=2$

선분AB 의 중심

$\mathrm{M}\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ 이 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로

$\frac{2+1}{2}=2\cdot\frac{1+3}{2}+b$

$\therefore b=-\frac{5}{2}$

따라서, $ab=-5$

30. 전체집합 $U = \{1,3,5,7,9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1,9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8 개

해설

$$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C$$
$$= A \cap (A^C \cup B)$$
$$= (A \cap B) = \{1\}$$

$A = \{1,9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1,3,5,7,9\}$ 을 만족하는 집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로

집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$(개)

31. 다음 빈 칸에 '공, 유한, 무한' 중 하나를 골라 알맞게 써넣어라.

> • 무한집합인 전체집합 U 의 부분집합 A 에 대하여 $n(A^c)=0$ 이면 집합 A 는 [ ] 집합이다.
> • A 는 유한집합, B 는 무한집합일 때, $A\cap B$ 는 [ ] 집합, $B-A$ 는 [ ] 집합, $A\cup B$ 는 [ ] 집합이다.
> • $A\cap B=A$, $A\cup B=A$ 일 때, $A-B$ 는 [ ] 집합이다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 무한

▷ 정답 : 유한

▷ 정답 : 무한

▷ 정답 : 무한

▷ 정답 : 공

해설

• $n(A^c)=0$ 이면 A^c 는 공집합, A 는 전체집합이다. 전체집합이 무한집합이므로 집합 A 는 무한집합이다.
• 유한집합과 무한집합의 교집합은 유한집합이고, 합집합은 무한집합이다. 또 무한집합에 대한 유한집합의 차집합은 무한집합이다.
• $A\cap B=A$, $A\cup B=A$ 라면 $A=B$ 이므로, $A-B$ 는 공집합이다.

32. 집합 $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 $A \cup B = S,\ A \cap B = \varnothing$ 인 두 집합 $A,\ B$로 분할한다. 또 $f(A)$를 집합 A의 원소의 총합, $f(B)$를 집합 B의 원소의 총합이라 할 때, $f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값을 구하면 ?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 25 ⑤ 45

해설

$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ A \cup B = S,\ A \cap B = \varnothing$ 이므로, $f(A) + f(B) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(A) \cdot f(B) &= f(A)(10 - f(A)) \\ &= -\{f(A)\}^2 + 10f(A) \\ &= -\{f(A) - 5\}^2 + 25 \end{aligned}$$

$\therefore f(A) \cdot f(B)$ 의 최댓값은 25

33. 서로 다른 세 양수 p, q, r에 대하여 $\dfrac{2}{p+q}+\dfrac{2}{q+r}+\dfrac{2}{r+p} \geq \dfrac{k}{p+q+r}$ 이 성립할 때 k의 최댓값은?

① 2 ② 5 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

주어진 부등식의 양 변에 $(p+q)+(q+r)+(r+p)$를 곱하면

$$6+2\left\{\left(\frac{q+r}{p+q}+\frac{r+p}{p+q}\right)+\left(\frac{p+q}{q+r}+\frac{r+p}{q+r}\right)+\left(\frac{p+q}{r+p}+\frac{q+r}{r+p}\right)\right\} \geq 2k$$

$$3+\left\{\left(\frac{q+r}{p+q}+\frac{r+p}{p+q}\right)+\left(\frac{p+q}{q+r}+\frac{r+p}{q+r}\right)+\left(\frac{p+q}{r+p}+\frac{q+r}{r+p}\right)\right\} \geq k$$

좌변에서 p, q, r이 양수이므로
산술평균, 기하평균에 의하여
(좌변)

$$\geq 3+2\sqrt{\frac{q+r}{p+q}\cdot\frac{p+q}{q+r}}+2\sqrt{\frac{r+p}{q+r}\cdot\frac{q+r}{r+p}}+2\sqrt{\frac{r+p}{p+q}\cdot\frac{p+q}{r+p}}$$

$$=3+2+2+2=9$$

(단, 등호는 $p=q=r$일 때 성립)
따라서 k의 최댓값은 9이다.

34. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

· 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq 0$ · 임의의 실수 x , y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 가 성립한다.

이 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

(i) $f(0) = 2$ (ii) $f(-x) = -f(x)$ (iii) $f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ (iv) $\{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2$ $= f(x+y)f(x-y) + 4$

① i , ii ② i , ii , iii ③ i , iii, iv

④ ii , iii, iv ⑤ i , ii , iii, iv

해설

(i) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$f(0)f(0) = f(0+0) + f(0-0)$ 이다.
정리하면 $\{f(0)\}^2 - 2f(0) = 0$
$f(0)(f(0)-2) = 0$ 이므로
$\therefore f(0) = 2\ (\because f(x) \neq 0\ )$
(ii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = 0,\ y = x$ 를 대입하면
$f(0)f(x) = f(0+x) + f(0-x)$ 이다.
$2f(x) = f(x) + f(-x)(\because\ f(0) = 2)$
$\therefore f(-x) = f(x)$ 이므로 ii 는 옳지 않다.
(iii) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서 $y = x$ 를 대입하면
$f(x)f(x) = f(x+x) + f(x-x)$ 이다.
$f(2x) = \{f(x)\}^2 - f(0)$
$\therefore f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2\ (\because f(0) = 2\ )$
(iv) $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 에서
$x = x+y,\ y = x-y$ 를 대입하면
$f(x+y)f(x-y) = f((x+y)+(x-y)) + f((x+y)-(x-y))$
$f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$ 이다.
$f(2x) = \{f(x)\}^2 - 2$ 을 $f(2x),\ f(2y)$ 에 적용하면
$f(x+y)f(x-y) = \{f(x)\}^2 - 2 + \{f(y)\}^2 - 2$ 이다.
$\therefore \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 = f(x+y)f(x-y) + 4$

35. 서울시의 전기 요금은 100kWh 이내로 사용한 경우는 6000 원이고, 100kWh 이상은 10kWh 증가할 때마다 1000 원씩 요금이 추가된다고 한다. 사용한 전기의 양을 AkWh , 전기 요금을 B원이라고 할 때, A와 B의 관계식은? (단, $A \geq 100$이고, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

① $B = 5000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$
② $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$
③ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{10}\right]$
④ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{11}\right]$
⑤ $B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-101}{11}\right]$

해설

$100\text{kWh} \leq A < 110\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 0$
$110\text{kWh} \leq A < 120\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 1$
$120\text{kWh} \leq A < 130\text{kWh}$ 일 때, $B = 6000 + 1000 \times 2$
$\vdots$
$\therefore\ B = 6000 + 1000\left[\dfrac{A-100}{10}\right]$