

1. 다음은 집합이 아니다. 밑줄 친 부분을 고쳐 집합이 되는 문장으로 고쳤을 때, 잘못 고친 것은?
- ① 작은 사람의 모임 → 키가 160cm 보다 작은 사람의 모임
 - ② 우리반에서 눈이 큰 학생의 모임 → 우리반에서 눈이 가장 큰 학생의 모임
 - ③ 머리가 큰 사람의 모임 → 머리가 작은 사람의 모임
 - ④ 인구가 많은 도시의 모임 → 인구가 50만명 보다 많은 도시의 모임
 - ⑤ 몸무게가 가벼운 연예인의 모임 → 몸무게가 40kg 이 넘지 않는 모임

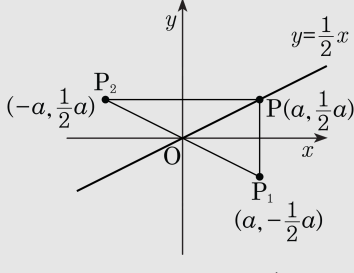
해설

③ ‘작은’이란 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

2. 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점 $P(a, b)$ 를 x 축, y 축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1 , P_2 라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4 일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $P\left(a, \frac{1}{2}a\right)$, x 축 대칭
 $: P_1\left(a, -\frac{1}{2}a\right)$, y 축 대칭 $: P_2\left(-a, \frac{1}{2}a\right)$
 $\triangle PP_1P_2$ 는 $\angle P_1PP_2 = 90^\circ$ 인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1} \times \overline{PP_2} \times \frac{1}{2}$ 이다.
 $\overline{PP_1} = a, \overline{PP_2} = 2a$
 $\therefore a \times 2a \times \frac{1}{2} = 4$
 $a = \pm 2$
 $a > 0$ 이므로 $a = 2, b = \frac{1}{2}a = 1$
 $\therefore a + b = 3$

3. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$

② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$

④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{AB}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots \textcircled{1}$$

그리고 $\overline{AB}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m \left(\frac{a+c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b+d = m(a+c) \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$a-c = \frac{b+d}{a+c} (d-a)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

4. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 는 다음의 조건에 따라 이동한다.

- ㉠ $x > y$ 이면 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동 한다.

㉡ $x \leq y$ 이면 x 축의 방향으로 1 만큼 평행 이동한다.
- 처

음 점 P 의 좌표가 $(1, 0)$ 일 때, 점 P 가 이동을 시작하여 100 번째 도착하는 점의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

조건에 따라 이동시켜보면,
 $(1, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1)$
 $\rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \cdots$
 $\therefore 3n - 1$ 번째에 (n, n) 에 도착한다.
 $\Rightarrow (3 \times 33) - 1 = 98$ 번째에 $(33, 33)$ 에 도착한다.
 $\therefore 100$ 번째는 $(33, 34)$
 $\Rightarrow (a, b) = (33, 34)$
 $a + b = 67$

5. 두 변환 f, g 가 다음과 같이 주어졌을 때, $(g \circ f)(-2, 3)$ 을 구하면?

$f : (x, y) \rightarrow (x - 1, y + 1)$
 $g : (x, y)$ 를 원점을 중심으로 하여
반시계방향으로 90° 회전시킨다.

- ① (4, 3)
- ② (3, -4)
- ③ (-4, -3)
- ④ (-4, -1)
- ⑤ (4, -3)

해설

합성변환의 정의에 의해 $(g \circ f)(-2, 3)$ 을 풀면

$(g \circ f)(-2, 3) = g(f(-2, 3)) = g(-3, 4)$

주어진 정의에 의해 $g(-3, 4)$ 는 점

$(-3, 4)$ 를 원점을 중심으로 하여 반시

계방향으로 회전시킨 것이므로

그림에서와 같이 $P(-3, 4)$ 에 대해 회전

이동된 점 $P'(a, b)$ 를 정하면

$\overline{OP} = \overline{OP'}$ (회전축) ①

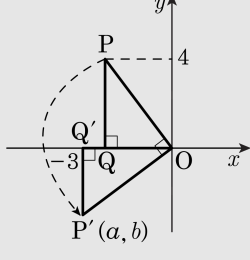
$\angle POQ = \angle OP'Q'$ ②

$\angle OQP = \angle OQ'P'$ ③

①, ②, ③에 의해 $\angle OPQ \equiv \angle P'OQ'$

따라서, 대응변으로 $\overline{OP} = \overline{P'Q'}$ 이고 $\overline{PQ} = \overline{OQ'}$ 다.

이를 제사분면의 좌표로 나타내면 $P(-4, -3)$



6. 다음 보기에서 집합에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

보기

- ㉠ $n(\{0\}) = 1$
- ㉡ $\{1, 2\} \supset \{2, 1\}$
- ㉢ $\{2, 4, 6, 8, \dots\} \supset \{2, 4, 6\}$
- ㉣ $n(\{2, 3, 5, 7\}) = n(\{0, \{0\}, \emptyset, \{0\}\})$
- ㉤ $n(\{1, 10\{1, 10\}\}) = 4$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

- ㉤ $n(\{1, 10\{1, 10\}\}) = 3$

7. 다음 중 부분집합의 개수가 32개인 것은?

- ① {1, 2, 3}
- ② { $x \mid x$ 는 22 이하의 4의 배수}
- ③ { $x \mid x$ 는 7보다 작은 홀수}
- ④ { $x \mid x$ 는 8의 약수}
- ⑤ { $x \mid x$ 는 4 이하의 자연수}

해설

- ① $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)
- ② { $x \mid x$ 는 22 이하의 4의 배수} = {4, 8, 12, 16, 20} 이므로 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ (개)
- ③ { $x \mid x$ 는 7보다 작은 홀수} = {1, 3, 5} 이므로 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)
- ④ { $x \mid x$ 는 8의 약수} = {1, 2, 4, 8} 이므로 $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)
- ⑤ { $x \mid x$ 는 4 이하의 자연수} = {1, 2, 3, 4} 이므로 $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)

8. 두 집합 $A = \{\neg, \neg, \neg, \neg\}$, $B = \{\neg, \neg, \neg, \neg\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합이면서 집합 B 의 부분집합이 되는 집합의 개수는?

① 0개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 8개

해설

집합 A 의 부분집합도 되고 집합 B 의 부분집합도 되는 집합은 $\{\neg, \neg, \neg\}$ 의 부분집합과 같으므로 $2^3 = 8$ (개)

9. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 집합의 개수가 16개일 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2^{(1을 제외한 원소의 개수)} = 2^{n-1} = 16 = 2^4 \quad \therefore n = 5$$

10. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 와 집합 B 가 다음과 같을 때, 다음 중 집합 A 가 될 수 없는 것은?

$A \cup B = \{x|x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}, B = \{x|x \text{는 } 3 \text{미만의 자연수}\}$

- ① {1, 4, 8}
- ② { $x|x$ 는 5보다 큰 2의 배수}
- ③ { $x|x$ 는 10보다 작은 4의배수}
- ④ { $x|x$ 는 8의 약수}
- ⑤ { $x|x$ 는 12의 약수}

해설

집합 $B = \{1, 2\}$ 이고, $A \cup B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로
집합 A 는 원소 4, 8 을 반드시 포함하는 $A \cup B$ 의 부분집합이다.
⑤ { $x|x$ 는 12의 약수} = {1, 2, 3, 4, 6, 12} $\not\subset$ {1, 2, 4, 8}

11. 집합 $A = \{1, 2, a, 5\}$, $B = \{2, b + 1, b + 2, 6\}$ 이고 $A \cap B = \{2, 4\}$ 라고 할 때, $(A - B) \cup (B - A)$ 는?

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 5\}$

③ $\{1, 3, 5\}$

④ $\{1, 3, 6\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 6\}$

해설

$A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 $a = 4, A = \{1, 2, 4, 5\}$ 이다.

(1) $b + 1 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$ 가 되어 조건에 맞지 않는다.

(2) $b + 2 = 4$ 일 경우, $A \cap B = \{2, 4\}$ 가 되어 조건에 맞는다.

따라서 $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이 되어

$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 5\} \cup \{3, 6\} = \{1, 3, 5, 6\}$ 이다.

12. 자연수 k 의 양의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, 주어진 식을 간단히 하면?

$$(A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24})$$

- ① A_{36}

② A_{24}

③ A_{18}

④ A_{12}

⑤ A_6

해설

$$\begin{aligned} & (A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{36} \cup A_{24}) \\ &= (A_{36} \cup A_{18}) \cap (A_{36} \cup A_{24}) \\ &= A_{36} \cup (A_{18} \cap A_{24}) \\ &= A_{36} \cup A_{72} \quad (\because 18 \text{과 } 24 \text{의 최소공배수는 } 72) \\ &= A_{36} \end{aligned}$$

13. 다음 <보기>의 조건 ‘ $p(x)$ ’를 만족하는 진리집합이 바르게 연결된 것은? (단, 전체집합은 실수의 집합 R)

보기

- (1) $p(x) : x$ 는 12의 양의 약수이다.
 $P = \{1, 2, 3, 6, 12\}$
- (2) $p(x) : x^2 + 1 = 0$
 $P = \emptyset$
- (3) $p(x) : x^2 - 5x - 4 = 0$
 $P = \{1, 4\}$
- (4) $p(x) : x^2 + 4x + 5 > 0$
 $P = R$

- ① (1), (2)
- ② (2), (3)
- ③ (3), (4)
- ④ (2), (4)
- ⑤ (1), (3)

해설

- (1) $p = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- (2) $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 \neq 0 \therefore P = \emptyset$
- (3) $P = \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \right\}$
- (4) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$ 이므로 $P = R$ 이다.

14. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

- ① $p \rightarrow r$
- ② $\sim q \rightarrow p$
- ③ $p \rightarrow \sim q$
- ④ $r \rightarrow q$
- ⑤ $r \rightarrow \sim q$

해설

$$\begin{aligned} p \rightarrow q(T) &\Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T) \\ \sim r \rightarrow \sim q(T) &\Rightarrow q \rightarrow r(T) \\ \therefore p \rightarrow q \rightarrow r &\Rightarrow p \rightarrow r(T) \end{aligned}$$

15. 두 집합 $A = \{3, a, a+2\}$, $B = \{3, 5, b\}$ 에 대하여, $A = B$ 일 때, 가능한 a, b 의 값은? (단, $a \neq b$)

- ① $a = 2, b = 3$ ② $a = 3, b = 5$ ③ $a = 4, b = 5$
④ $a = 5, b = 7$ ⑤ $a = 6, b = 9$

해설

$A = B$ 이고, $5 \in B$ 이므로 $5 \in A$

$a = 5$ 또는 $a + 2 = 5$

(i) $a = 5$ 일 때,

$$A = \{3, 5, 7\}, B = \{3, 5, 7\} \quad \therefore b = 7$$

(i) $a + 2 = 5$ 일 때, $a = 3$

$$A = \{3, 3, 5\}, B = \{3, 5, 3\} \quad \therefore b = 3$$

(단 $a \neq b$) 이므로 성립할 수 없다.

따라서 가능한 a, b 의 값은 $a = 5, b = 7$ 이다.

16. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은?

- ① $A = B, B = C$ 이면 $A = C$ 이다.
- ② $A \supset B, B = C$ 이면 $A \supset C$ 이다.
- ③ $A \subset B, B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.
- ④ $A \supset B, B \supset C, C \supset A$ 이면 $A = C$ 이다.
- ⑤ $n(A) < n(B) < n(C)$ 이면 $A \subset B \subset C$ 이다.

해설

⑤ 예를 들어 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}, C = \{6, 7, 8, 9\}$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이지만 $A \subset B \subset C$ 는 아니다.

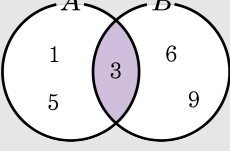
17. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 6, 9\}$

해설

$A = \{1, 3, 5\}$ 이고, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{3, 6, 9\}$ 이다.

18. 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

$\neg n(\{0\}) = 0$

$\mathbb{L} \phi \subset \{\emptyset\}$

$\mathbb{E} 4 \subset \{1, 2\}$

$\mathbb{E} 0 \subset \{0\}$

$\mathbb{E} 0 \in \emptyset$

$\mathbb{H} 0 \notin \emptyset$

- ①

$\mathbb{L}, \mathbb{H}$
- ②

$\mathbb{L}, \mathbb{E}$
- ③

$\neg, \mathbb{L}$
- ④

$\mathbb{E}, \mathbb{E}$
- ⑤

$\mathbb{E}, \mathbb{E}$

해설

$\neg n(\{0\}) = 1$

$\mathbb{E} 4 \notin \{1, 2\}$

$\mathbb{E} 0 \in \{0\}$

$\mathbb{E} 0 \notin \emptyset$

19. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 40 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 8, 10\}$ 에 대하여 $A * B = (A \cup B) - A$ 라고 할 때, $(A * B) * A$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

해설

$B \subset A$ 이므로 $A * B = \emptyset$

$(A * B) * A = A$

$\therefore A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

20. 전체집합 U 의 서로 다른 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ① $A \cap A^c = U$

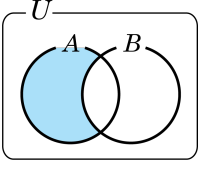
② $(B^c)^c = A$
- ③ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

④ $A - B = B^c \cap A$
- ⑤ $A \subset B$ 이면 $B - A = \emptyset$

해설

- ① $A \cap A^c = \emptyset$
- ② $(B^c)^c = B \neq A$
- ⑤ $A \subset B$ 이면 $A - B = \emptyset$

21. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 ?



- ① $A - B$ 라고 쓰며, A 마이너스 B 라고 읽는다.
- ② A 에도 속하고 B 에도 속하는 원소들로 이루어진 집합이다.
- ③ $A - B = \{x|x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$
- ④ $A - B = B - A$
- ⑤ $A - B = A \cap B^c$

해설

- ① $A - B$ 라고 쓰며, A 차집합 B 라고 읽는다.
- ② A 에는 속하지만 B 에도 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합이다
- ④ $A - B \neq B - A$

22. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 한 자리 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $B = \{2, 4, 6, 8\}, A^c = \{6, 7, 8, 9\}, A^c \cap B^c = \{7, 9\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A = U - A^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
 $A - B = \{1, 3, 5\}$
 $\therefore (A - B)^c = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$

23. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의
세 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{1, 5\}$
가 있다.
전체집합 U 의 두 부분집합 X, Y 에 대하여 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$
이라 할 때, $(A \circ B) \circ C$ 는?

- ① {1, 3}
- ② {1, 5}
- ③ {1, 7}
- ④ {1, 2, 5}
- ⑤ {1, 2, 6, 7}

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 이다.
 $X \circ Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 이므로
 $A \circ B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 3\} = \{2, 5, 6, 7\}$ 이다.
따라서 $(A \circ B) \circ C = \{1, 2, 5, 6, 7\} - \{5\} = \{1, 2, 6, 7\}$ 이다.

24. 다음은 명제 ‘ $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)’에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

... (생략) ...
 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3 의 배수이다.
한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여
 $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
 $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
 $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로 n^2 을 3 으로 나눈 나머지는 0 또는 1 이다.
따라서 $n^2 + 1$ 을 3 으로 나눈 나머지는 1 또는 2 이다.
... (생략) ...

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

- ① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
- ② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
- ③ m, n 이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
- ④ m, n 이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
- ⑤ m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n 이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$ 은 3 의 배수이다. ... ㉠
한편, 정수 n 이 어떤 정수 k 에 대하여,
 $n = 3k$ 이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
 $n = 3k + 1$ 이면 $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
 $n = 3k + 2$ 이면 $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ 이므로, n^2 을 3 으로 나눈 나머지는 0 또는 1 이다.
따라서, $n^2 + 1$ 을 3 으로 나눈 나머지는 1 또는 2 이다. ... ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 m, n 이 모두 정수인 해는 없다.

25. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

- ① $A \cap B = \emptyset$
- ② $A \cup B = U$
- ③ $A \subset B^c$
- ④ $A^c \cup B = U$
- ⑤ $A = B^c$

해설

$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B - A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$ 에서 $A^c = B$
즉, $A = B^c$

26. $0 < a < b$, $a + b = 1$ 일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

1, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - \sqrt{a}$, $\sqrt{b-a}$

- ① $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ ② $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- ③ $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$ ④ $\sqrt{b-a} < 1$
- ⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
 $= 2\sqrt{ab} > 0$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > 1$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
 $= (a+b) - b + a$
 $= 2a > 0$

$\therefore 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$
 $= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
 $= 2\sqrt{ab} - 2a$
 $= 2\sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$
 $\therefore \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

(i), (ii), (iii) 에서 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

27. $x+y+z=4, x^2+y^2+z^2=6$ 을 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 x 가 취할 수 있는 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$x+y+z=4$ 에서 $y+z=4-x\cdots\textcircled{1}$
 $x^2+y^2+z^2=6$ 에서 $y^2+z^2=6-x^2\cdots\textcircled{2}$
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2+1^2)(y^2+z^2)\geq(y+z)^2$
(단, 등호는 $y=z$ 일 때 성립)
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면
 $2(6-x^2)\geq(4-x)^2, 3x^2-8x+4\leq 0$
 $(3x-2)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \frac{2}{3}\leq x\leq 2$
따라서 $M=2, m=\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{M}{m}=3$

28. 빈이의 주머니에 0, 1, 2의 숫자가 적힌 카드가 들어 있고, 헤교의 주머니에는 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드가 들어있다. 둘이서 카드를 하나씩 꺼낼 때, 두 숫자를 곱하여 생기는 숫자들을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : {0, 1, 2, 3, 4, 6}

해설

빈이의 주머니에 들어 있는 숫자 0, 1, 2를 하나씩 차례로 헤교의 카드 1, 2, 3에 곱하면

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0$

$1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$

$2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6$ 이다.

여기서 생기는 숫자는 모두 0, 1, 2, 3, 4, 6이므로 원소나열법으로 나타내면 {0, 1, 2, 3, 4, 6} 이다.

29. 집합 A 에 대하여 집합 $P = \{X | X \subset A\}$ 일 때, 집합 P 의 부분집합 중 원소의 개수가 적어도 1 개인 부분집합의 개수는 15 개이다. $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원소의 개수가 n 인 진부분집합의 개수는 $2^n - 1$ (개)이므로

$$n(P) = 4$$

집합 P 의 원소의 개수는 집합 A 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{n(A)} = 4, n(A) = 2$$

30. 두 집합 $A = \{2, 1, a + 3, b\}$, $B = \{4, a, b + 1\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

(i) $a + 3 = 4$ 일 때, $a = 1$

$A = \{2, 1, 4, b\}$

$B = \{4, 1, b + 1\}$

$b + 1 = 2$, $b = 1$ (×)

(ii) $b = 4$ 일 때,

$A = \{2, 1, a + 3, 4\}$

$B = \{4, a, 5\}$

$a + 3 = 5$, $a = 2$ (○)

$\therefore a + b = 2 + 4 = 6$

31. 집합 $A = \{a, d, e\}$ 이고 집합 $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 일 때, $A \cap X = \{a, e\}$, $c \notin X$, $X \cup B = B$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

집합 B 의 부분집합 중 원소 a, e 는 포함하고, 원소 c, d 는 포함하지 않는 부분집합의 수를 구한다.

$2^{6-2-2} = 2^2 = 4$ (개)

32. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cap \{1, 3\} = B$, $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 이면 $B \subset A$, $\{2, 3, 4\} \subset A$
 $A \cap \{1, 3\} = B$ 이면 $\{3\} \subset B \subset \{1, 3\}$
따라서 B 는 2, 4, 5 를 원소로 가질 수 없으므로 $n(B)$ 의 최댓값은 2
 $n(B) = 2$ 일 때, $B = \{1, 3\}$ 이고, $A \cap \{1, 3\} = B$ 에서 $1 \in A$
또, $5 \in A$ 라고 가정하면, $B \cup \{2, 3, 4\} = A$ 에서 $5 \in B$ 이어야 하므로 모순
따라서 $5 \notin A$, $n(A)$ 의 최댓값은 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때 4
따라서 $n(A) + n(B)$ 의 최댓값은 $2 + 4 = 6$

- 33.** 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를
- (1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x, 0, x\}$
- (2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \left\{\frac{3}{x}, 1, \frac{x}{3}\right\}$ 이라고 정의한다.
- 두 집합 $A = \{x|x\text{는 }2\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x\text{는 }3\text{의 배수}\}$ 일 때, $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6])$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x|x \text{ 는 } 2 \text{ 의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$
,
 $B = \{x|x \text{ 는 } 3 \text{ 의 배수}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$,
 $2 \in A - B$ 이므로 $(A - B)[2] = \{-2, 0, 2\}$ 이고,
 $6 \notin B - A$ 이므로 $(B - A)[6] = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ 이다.
따라서 $(A - B)[2] \cup (B - A)[6] = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ 이고 $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6]) = 5$

34. 수학 문제집이 A, B, C 세 종류가 있다, 각 문제집을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때, $n(A) = 6, n(B) = 8, n(C) = 11$ 이고 $n(A \cap B) = 4, n(A \cap B \cap C) = 2$ 이다. 세 문제집 중 적어도 한 문제집을 갖고 있는 학생수를 x 라 할 때, x 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$n(A \cap B \cap C^c)$$

$$= n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 4 - 2 = 2 \text{ 이}$$

$$\text{므로, } n(A \cap B^c \cap C) = a, n(A^c \cap B \cap C) = b$$

$$\text{라 하면 벤 다이어그램을 그려서 나누어지}$$

$$\text{는 7 개 부분의 원소의 개수는 다음 그림과}$$

$$\text{같다.}$$

$$\text{이 때, } a \geq 0, b \geq 0, 2 - a \geq 0, 4 - b \geq 0, 9 - (a + b) \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$4 \text{ 개의 부등식에서 } 0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 4 \text{ 이고 } \therefore 0 \leq a + b \leq 6$$

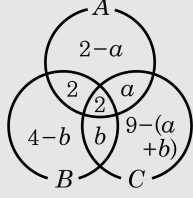
$$\text{이것은 마지막 부등식을 만족시킨다.}$$

$$x = n(A \cup B \cup C) = 19 - (a + b) \text{ 이므로 (그림에서 7개 부분을}$$

$$\text{모두 더한 값이다.)}$$

$$\therefore 13 \leq x \leq 19$$

$$\text{따라서 } x \text{ 의 최솟값은 13 이다.}$$



35. A, B, C 세 학생 중 한 명이 지각을 하였다. 다음은 누가 지각을 했는가에 대한 서로의 주장이다.

A: 내가 지각을 하였다.
B: A의 말은 진실이다.
C: B는 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.

세 사람 중 한 사람만이 진실을 말하고 있다고 할 때, 위의 진술에서 진실을 말하고 있는 학생과 지각을 한 학생을 차례대로 나열하면?

- ① A, A ② A, B ③ B, C ④ C, A ⑤ C, B

해설

- (i) A가 진실을 말한 경우 B는 거짓말을 한 것이었고 A의 말이 진실이 아닌 것이 되어 모순이다.
(ii) B가 진실을 말한 경우 A는 거짓말을 한 것이고, 이는 B의 말과 모순이다.
(iii) C가 진실을 말한 경우 A, B는 모두 거짓말을 하였고, B가 지각하였다.
따라서, 진실을 말한 학생은 C이고, 지각한 학생은 B이다.

36. 두 집합 A, B 가 $A = \{x \mid x^2 - a^2 \leq 0\}$, $B = \{x \mid |x + 2| \leq b\}$ 일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이기 위한 필요충분조건은? (단, $a > 0, b > 0$)

- ① $ab = 2$
 ② $ab = 4$
 ③ $a + b > 2$
- ④ $a + b < 4$
 ⑤ $a + b < 2$

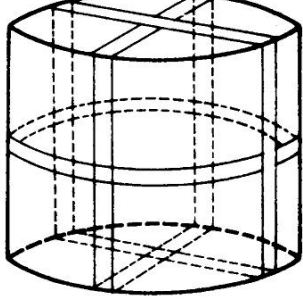
해설

$A = \{x \mid x^2 - a^2 \leq 0\} = \{x \mid -a \leq x \leq a\}$
 $B = \{x \mid |x + 2| \leq b\} = \{x \mid -b - 2 \leq x \leq b - 2\}$
 $A \cap B = \emptyset$ 이기 위해서는 그림과 같아야 한다.

또는

그런데 $a > 0, b > 0$ 에서 $-b - 2 < 0$ 이므로 아래 수직선의 경우는 모순이다. 위의 수직선에서 $b - 2 < -a$ 이므로 만족하는 조건은 $a + b < 2$ ($\because a > 0, b > 0$)

37. 길이가 60 cm 인 장식용 테이프를 가지고 원기둥 모양의 선물을 장식하려 한다. 테이프를 3 개로 잘라 아래의 그림과 같이 선물의 표면에 붙여서 장식할 때, 다음은 이 테이프로 장식할 수 있는 선물의 최대 부피를 구하는 과정이다. 그런데 아래 풀이 과정은 잘못되었다. 어디에서 잘못이 일어났는가?



선물의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면
 $2 \times 2(2r + h) + 2\pi r = 60 \dots \textcircled{1}$
한편, (산술평균) $\geq$ (기하평균) 이므로 $\dots \textcircled{2}$
 $8r + 4h + 2\pi r \geq 3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r} \dots \textcircled{3}$
즉, $60 \geq 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \sqrt{\pi r^2 h}$
따라서, $\pi r^2 h \leq 125 \dots \textcircled{4}$
이상에 의해, 구하려는 최대 부피는 125 cm^3 이다. $\dots \textcircled{5}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$8r + 4h + 2\pi r$ $3^3 \sqrt{8r \cdot 4h \cdot 2\pi r}$ 에서
등호는 $8r = 4h = 2\pi r$ 일 때 성립한다.
그런데 $8 \neq 2\pi$ 이므로 최대 부피는 125 cm^3 가 아니다.

38. x, y 는 실수이고 $x + y = 2$ 일 때, $4^x + 4^y + 2^{x+1} + 2^{y+1} + 3$ 의 최솟값은?

① 16

② 19

③ 22

④ 25

⑤ 28

해설

$2^x + 2^y = t$ 라 놓으면 $2^x > 0, 2^y > 0$ 이므로

$$t = 2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^y} = 2\sqrt{2^{x+y}} = 4$$

$\therefore t \geq 4$

한편 $4^x + 4^y + 2^{x+1} + 2^{y+1} + 3$

$$= (2^x + 2^y)^2 + 2(2^x + 2^y) - 5$$

$$= t^2 + 2t - 5 = (t + 1)^2 - 6$$

$t \geq 4$ 이므로

$t = 4$ 일 때 최솟값 19 를 갖는다.

39. $x < 0$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 가 $2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 를 만족할 때,
 $f(x)$ 의 최댓값은?

① $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$

해설

$$2f(x) = \frac{1}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) = x \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 하면

$$3f(x) = \frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 2}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x} = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x}$$

$x < 0$ 이므로

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3x} \leq -2\sqrt{\frac{x}{3} \cdot \frac{2}{3x}} = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore f(x) \text{의 최댓값은 } -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

40. 두 직선 $y = 2x$, $y = ax + b$ ($a < 0, b > 0$) 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 옮겨진 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 가 되었다. 이때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선의 방정식 $y = 2x$, $y = ax + b$ 를
연립하여 풀면 $2x = ax + b$, $(a - 2)x = -b$

$$\therefore x = -\frac{b}{a-2} \quad (\because a \neq 2)$$

$$\text{이것을 } y = 2x \text{ 에 대입하면 } y = -\frac{2b}{a-2}$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는

$$\left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right)$$

따라서, 두 직선 $y = 2x$, $y = ax + b$ 및 y 축으로
둘러싸인 삼각형의 세 꼭지점의 좌표는

$$(0, 0), (0, b), \left(-\frac{b}{a-2}, -\frac{2b}{a-2}\right) \text{ 이므로}$$

이 삼각형의 무게중심을 G 라고 하면

$$G\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b - \frac{2b}{a-2}}{3}\right)$$

이때, 점 G 와 대칭이동한 후의

$$\text{삼각형의 무게 중심 } \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ 는}$$

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\left(\frac{-\frac{b}{a-2}}{3}, \frac{b - \frac{2b}{a-2}}{3}\right) \text{ 는 } \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) \text{ 과 같다.}$$

$$\therefore -\frac{b}{a-2} = 2 \dots\dots\textcircled{㉠}$$

$$b - \frac{2b}{a-2} = 10 \dots\dots\textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$b - 2 \cdot (-2) = 10$$

$$\therefore b = 6$$

이것을 ㉠에 대입하면 $a = -1$

$$\therefore a + b = 5$$

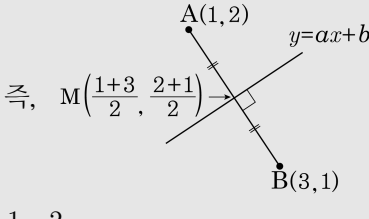
41. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$ 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이 될 때, ab 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

두 원의 방정식은 각각 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 이므로
두 원의 중심 (1, 2), (3, 1) 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이 되어야 한다.



$$\frac{1-2}{3-1} \times a = -1$$

$$\therefore a = 2$$

선분AB 의 중점

$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$ 이 직선 $y = ax + b$ 위에 있으므로

$$\frac{2+1}{2} = 2 \cdot \frac{1+3}{2} + b$$

$$\therefore b = -\frac{5}{2}$$

따라서, $ab = -5$

42. 두 점 $A(a,b)$ 와 $B(c,d)$ 가 직선 $l : x + y = 1$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, a, b, c, d 의 관계식으로 바르게 짝지어진 것은? (단, 두 점 A, B 는 직선 위에 있지 않다.)

㉠ $a + b = c + d$	㉡ $a + c = b + d$
㉢ $a + d = b + c$	㉣ $a + b + c + d = 0$
㉤ $a + b + c + d = 1$	㉥ $a + b + c + d = 2$

- ① ㉠, ㉢ ② ㉡, ㉤ ③ ㉢, ㉥
- ④ ㉠, ㉤ ⑤ ㉢, ㉢

해설

두점 AB 가 직선 l 에 대하여 대칭이면

(i) 선분 AB 와 직선 l 은 수직이다.

$$\frac{d-b}{c-a}(-1) = -1$$

$$d-b = c-a$$

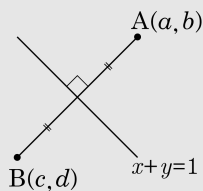
$$a+d = b+c$$

(ii) AB 의 중점 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ 가

직선 l 위에 있다.

$$\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} = 1$$

$$\therefore a+b+c+d = 2$$



43. 두 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 1$ 은 직선 l 에 대하여 서로 대칭이다. 직선 l 의 방정식은?

- ① $y = -2x + 3$
- ② $y = -x + 2$
- ③ $y = x + 3$
- ④ $y = -x + 3$
- ⑤ $y = 2x - 1$

해설

두 원의 중심 $(-2, 1)$, $(2, 5)$ 는 직선 l 에 대하여 대칭이므로 직선 l 은 두 원의 중심을 연결한 선분의 수직이등분선이다.

따라서 직선 l 의 방정식을 $y = ax + b$ 라 하면

i) 두 원의 중심을 지나는 직선의 기울기가

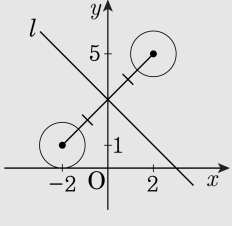
$$\frac{5-1}{2-(-2)} = 1 \text{ 이므로}$$

$$a = -1$$

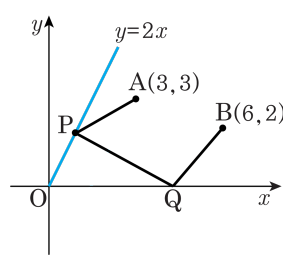
ii) 두 원의 중심을 연결한 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{5+1}{2}\right) \text{ 에서 } (0, 3) \text{ 이므로 } b = 3 \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = -x + 3$ 이다.



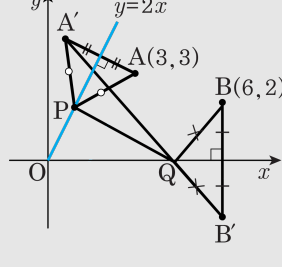
44. 좌표평면 위에 두 점 A (3, 3), B (6, 2) 와 직선 $y = 2x$ 위를 움직이는 점 P , x 축 위를 움직이는 점 Q 가 있다. 이때, $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{11\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{11\sqrt{10}}{5}$
 ③ $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{13\sqrt{10}}{5}$
 ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

다음 그림과 같이 점 A (3, 3) 을 직선 $y = 2x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하고 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면



$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{BQ} = \overline{B'Q} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'}$$

따라서, 구하는 최솟값은 선분 A'B' 의 길이이다.

이때, 점 A' (a, b) 라고 하면

직선 AA' 과 직선 $y = 2x$ 가 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-3} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 9 \dots\dots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$$

또한, 선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 은

직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$\frac{b+3}{2} = 2 \cdot \frac{a+3}{2}$$

$$\therefore 2a - b = -3 \dots\dots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{21}{5}$$

$$\therefore A' \left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

한편, 점 B' (6, -2) 이므로

$$\overline{A'B'} = \sqrt{\left(6 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{21}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{27}{5}\right)^2 + \left(-\frac{31}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1690}{25}} = \frac{13\sqrt{10}}{5}$$

따라서, 구하는 최솟값은 $\frac{13\sqrt{10}}{5}$ 이다.

45. 두 점 A (2, 5), B (7, 0) 과 직선 $x + y = 4$ 위의 한 점 P 에 대하여 $AP + BP$ 의 최솟값과 이때의 점 P 의 좌표를 구하면?

- ① $\sqrt{17}$, P (2, -1) ② $2\sqrt{17}$, P (3, 1) ③ $3\sqrt{17}$, P (5, 2)
 ④ $4\sqrt{17}$, P (4, 8) ⑤ $5\sqrt{17}$, P (1, 2)

해설

점 A (2, 5) 를 직선 $x + y = 4$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $A' (a, b)$ 로 놓으면

선분 AA' 의 중점 $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b+5}{2}\right)$ 는

직선 $x + y = 4$ 위에 있으므로

$$\frac{a+2}{2} + \frac{b+5}{2} = 4$$

$$\therefore a + b = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AA' 은 $x + y = 4$ 와 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-2} \cdot (-1) = -1$$

$$\therefore a - b = -3 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 2$$

$$\therefore A' (-1, 2)$$

이때, 다음 그림에서

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(7+1)^2 + (0-2)^2}$$

$$= \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

따라서, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{17}$ 이다.

한편, $\overline{AP} + \overline{BP} = 2\sqrt{17}$ 일 때의

점 P 는 직선 $A'B$ 와 직선 $x + y = 4$ 의 교점이다.

두 점 $A' (-1, 2), B (7, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y - 0 = \frac{0 - 2}{7 - (-1)} (x - 7),$$

$$y = -\frac{1}{4} (x - 7)$$

$$\therefore x + 4y - 7 = 0$$

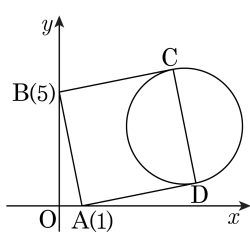
두 방정식 $x + 4y - 7 = 0$, $x + y - 4 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 1$$

$$\therefore P (3, 1)$$

따라서, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소일 때의 점 P 의 좌표는 P (3, 1)

46. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 제 1 사분면에 정사각형 ABCD 가 있다. A(1,0), B(0,5) 일 때, 변 CD 를 지름으로 하는 원의 방정식은?



- ① $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ② $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ③ $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ④ $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$
 ⑤ $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

해설

정사각형이므로,

B $\rightarrow$ A : x 축으로 1, y 축으로 -5 이면

A $\rightarrow$ D : x 축으로 5, y 축으로 1 을 이동한다.

$\therefore$ D(6,1)

마찬가지로 적용하면, C = (5,6)

$\therefore$ 원의 중심 : $\left(\frac{6+5}{2}, \frac{6+1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)$

반지름은 $\frac{\sqrt{1^2 + 5^2}}{2}$

$\Rightarrow \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$

47. 포물선 $y = x^2 + 3x - 9$ 위의 서로 다른 두 점 A, B 가 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭일 때, 두 점 A, B 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

해설

A 의 좌표를 (a, b) 라 두면

B의 좌표는 (b, a) 가 된다.

두 점은 포물선 위의 점이므로

$a = b^2 + 3b - 9$, $b = a^2 + 3a - 9$ 가

성립한다.

두 식을 변변 빼서 정리하면

$$(a - b)(a + b + 4) = 0$$

$$\therefore a + b + 4 = 0 \quad (\because a \neq b)$$

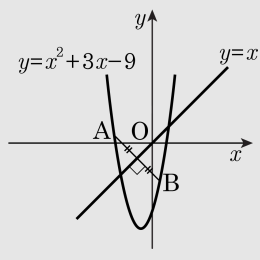
$b = -a - 4$ 를 $b = a^2 + 3a - 9$ 에 대입하면

$$a^2 + 4a - 5 = 0, \quad (a + 5)(a - 1) = 0$$

$a = 1$ 또는 -5 , $b = -5$ 또는 1 이므로

A($-5, 1$), B($1, -5$) 가 된다.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$



48. 점 (p, q) 의 점 $(-3, 2)$ 에 대한 대칭점을 점 (m, n) 이라 하고, 점 (p, q) 가 직선 $y = -3x + 2$ 위를 움직일 때, 점 (m, n) 이 움직이는 도형의 방정식을 $ax + by + c = 0$ 이라 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 서로 소이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b + c = 20$

해설

점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 점 $P(p, q)$ 에 대하여 대칭이면

$(AB \text{의 중점의 좌표}) = (\text{점 } P \text{의 좌표})$

두 점 (p, q) , (m, n) 의 중점이 점 $(-3, 2)$

이므로

$$\left(\frac{p+m}{2}, \frac{q+n}{2} \right) = (-3, 2)$$

$$\therefore p = -m - 6, \quad q = -n + 4$$

또한 점 (p, q) 는 직선 $y = -3x + 2$

위를 움직이므로

$$q = -3p + 2 \text{ 즉, } -n + 4 = -3(-m - 6) + 2,$$

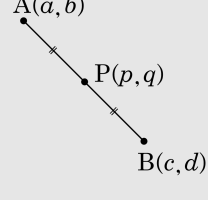
$$3m + n + 16 = 0$$

$\therefore$ 점 (m, n) 이 움직이는 도형의 방정식은

$$3x + y + 16 = 0$$

따라서, $a = 3, b = 1, c = 16$ 이므로

$$a + b + c = 20$$



49. 직선 $y = 2x + 1$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 대하여 대칭이동 시킬 때, 이동된 도형의 방정식을 구하면?

① $x - 2y - 3 = 0$

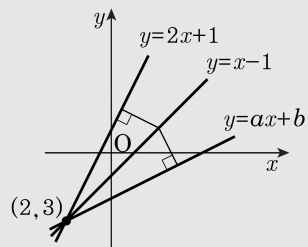
② $x - 2y - 4 = 0$

③ $2x - 3y + 3 = 0$

④ $2x - 3y + 4 = 0$

⑤ $2x - 3y + 5 = 0$

해설



i) 먼저 $y = 2x + 1$ 과 $y = x - 1$ 의 교점을 구하면 $(2, 3)$ 이다.
그리고 이점은 $y = ax + b$ 를 지난다.

$$\therefore 3 = 2a + b$$

ii) 그리고 $y = x - 1$ 의 임의의 점에서

$y = 2x + 1$, $y = ax + b$ 에 이르는 거리는 같다.

$y = ax + b$ 와의 거리 :

$$\frac{|a + 0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

i) 에서 구한

$2a + b = 3$ 을 이용하여 연립하면

$$a = 2, \quad b = 1 \quad \text{또는} \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

($\because y = 2x + 1$ 는 두 직선이 일치)

50. 직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭이동시킨 직선과 $x - y + 2 = 0$ 과의 교점을 P 라 할 때 $\overline{OP}$ 의 최솟값은? (단, O 는 원점이다.)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

직선 $y = 0$ 을 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭 이동시킨 직선을 $y = m'x$ 이라 할 때

$y = m'x$ 와 $x - y + 2 = 0$ 의 교점을 P 라 하면

$\overline{OP}$ 의 최솟값은 원점에서 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 이르는 거리와 같다.

따라서 $\overline{OP}$ 의 최솟값은 $\frac{|2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$ 이다.

