1. 두 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 24\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } \boxed{}\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\boxed{}$ 안에 알맞은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

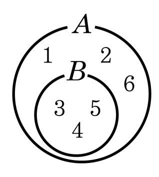
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$\boxed{}$는 24 의 약수이다.
24 의 약수 : $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

2. 다음과 같이 두 집합 A, B가 오른쪽 벤 다이어그램과 같을 때, 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\{1,\ 5\} \subset B$
㉡ $\varnothing \subset B$
㉢ $\{4,\ 6\} \subset A$
㉣ $6 \subset A$
㉤ $\{3,\ 4,\ 5\} \in B$

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉤ ④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ $\{1,\ 5\} \not\subset B$
㉣ $6 \in A$
㉤ $\{3,\ 4,\ 5\} \subset B$

3. 집합 $A = \left\{x | x\text{는 } 32\text{의 약수}\right\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\varnothing \subset A$

② $16 \notin A$

③ A 는 무한집합이다.

④ $n(A) = 5$

⑤ $\left\{x | x\text{는 } 8\text{의 약수}\right\} \subset A$

해설

$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

① $\varnothing$ 는 모든 집합의 부분집합

② $16 \in A$

③ A 는 유한집합

④ $n(A) = 6$

⑤ $\left\{x | x\text{는 } 8\text{의 약수}\right\} = \{1, 2, 4, 8\} \subset A$

4. 다음 표는 역대 올림픽에서 우리나라가 획득한 메달 수를 집계 한 것이다. 다음 물음에 답하여라.

연도	개최지	금	은	동	합계
1948	런던	0	0	2	2
1952	헬싱키	0	0	2	2
1956	멜버른	0	1	1	2
1964	도쿄	0	2	1	3
1968	멕시코시티	0	1	1	2
1972	뮌헨	0	1	0	1
1976	몬트리올	1	1	4	6
1984	로스앤젤레스	6	6	7	19
1988	서울	12	10	11	33
1992	바르셀로나	12	5	12	29
1996	애틀랜타	7	15	5	27
2000	시드니	8	10	10	28
2004	아테네	9	12	9	30
2008	베이징	13	10	8	31

메달을 30개 이상 획득한 대회의 개최 도시의 집합을 A, 메달을 20개 이상 획득한 대회의 개최 도시의 집합을 B 라 할 때, 다음 중 알맞은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$　② $B \subset A$　③ $A \neq B$
④ $A = B$　⑤ $A \not\subset B$

해설

메달을 30개 이상 획득한 개최 도시를 표에서 구하면
$A = \{$서울, 아테네, 베이징$\}$이다.
메달을 20개 이상 획득한 개최 도시는
$B = \{$서울 , 바르셀로나, 애틀랜타, 시드니, 아테네, 베이징$\}$이다.
그러므로 알맞은 것은 $A \subset B$, $A \neq B$ 이다.

5. 다음 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, $Q^c \subset P^c$ 인 경우는?

① $p : x \le 1$
$q : \ x \ \le 1$

② $p : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
$q : x = 1$

③ $p : a > 0, b > 0$
$q : a^2 + b^2 \ge 2a - 1$

④ $p : x$ 가 3의 배수
$q : x$ 는 9의 배수

⑤ $p : x^2 - 1 = 0$
$q : (x + 1)^2 = 0$

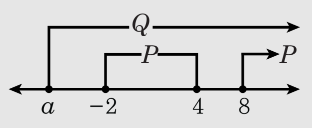
해설

$Q^c \subset P^c$, $P \subset Q$
① $Q \subset P$
② $Q \subset P$
④ $Q \subset P$
⑤ $Q \subset P$
③ $q : a^2 + b^2 \ge 2a - 1 \rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 \ge 0 \rightarrow (a-1)^2 + b^2 \ge 0$
$\rightarrow a,\ b$ 는 모든 실수

6. 두 조건 $p: -2 \le x \le 4$ 또는 $x \ge 8$, $q: x \ge a$에 대하여 $p \Rightarrow q$일 때, a의 최댓값은?

① -2 ② 0 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설



$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (P \subset Q)$ 이므로

$\therefore a \le -2$, 최댓값 : -2

7. 세 명제 $\sim q \rightarrow p$, $r \rightarrow \sim p$, $\sim r \rightarrow s$ 가 참일 때, 다음 중 이 세 명제로부터 추론할 수 없는 것은?

① $\sim p \Rightarrow q$ ② $r \Rightarrow q$ ③ $\sim s \Rightarrow p$

④ $\sim q \Rightarrow \sim r$ ⑤ $p \Rightarrow s$

해설

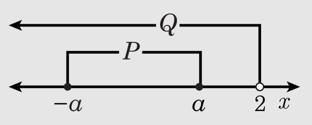
$\sim q \Rightarrow p$ 이고, $r \Rightarrow \sim p$ 에서 $p \Rightarrow \sim r$, 또 $\sim r \Rightarrow s$ 이므로
$\sim q \Rightarrow p \Rightarrow \sim r \Rightarrow s \cdots$ ㉠
① $\sim q \Rightarrow p$ 이므로 그 대우도 참이다. 즉, $\sim p \Rightarrow q$
②, ④ ㉠에서 $\sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 그 대우도 참이다. 즉, $r \Rightarrow q$
③, ⑤ ㉠에서 $p \Rightarrow s$ 이므로 $\sim s \Rightarrow \sim p$ 이지만 $\sim s \Rightarrow p$ 인지는 알 수 없다.

8. $|x| \le a$가 $2x-5 < x-3$이 되기 위한 충분조건이 되도록 실수 a의 범위를 정하면?

① $a < 2$ ② $a > 2$ ③ $a \le 2$ ④ $a < 1$ ⑤ $a > 4$

해설

$P = \{x| -a \le x \le a\}$, $Q = \{x|2x-5 < x-3\} = \{x|x < 2\}$ 에서 $P \subset Q$ 가 되도록 a 값의 범위를 결정한다. P, Q 를 문제의 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(주의 : $a \ne 2 \because P \subset Q$)$\therefore\ a < 2$

9. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A-(A-B)=A$ 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $A \subset B$ ② $A^c \subset B^c$ ③ $A-B=\varnothing$

④ $A \cup B = B$ ⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A-(A-B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$\therefore\ A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$

10. 길이가 10인 쇠파이프를 n등분(같은 크기)으로 잘라 다른 장소로 운반하려고 한다. 길이가 x인 쇠파이프 1개를 운반하는 데 드는 비용이 $250x^2$원이고 쇠파이프를 한 번 자를 때 드는 비용이 1000원이라 할 때, 이 쇠파이프를 잘라서 운반하는 데 드는 최소비용은?

① 6000원 ② 7000원 ③ 8000원
④ 9000원 ⑤ 10000원

해설

쇠파이프 한 개의 길이 : $\frac{10}{n}$

(총 비용) $= 250\left(\frac{10}{n}\right)^2 \times n + 1000(n-1)$

$= \frac{25000}{n} + 1000n - 1000$

$\geq 2\sqrt{\frac{25000}{n} \times 1000n} - 1000$

$= 2 \times 5000 - 1000$

$= 10000 - 1000 = 9000$

11. 두 집합 $A=\{a,\ b,\ 7\}$, $B=\{a+1,\ 4,\ 6\}$에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, $a \times b$의 값은?

① 16　　② 20　　③ 24　　④ 28　　⑤ 32

해설

$A \subset B$이고 $B \subset A$는 $A = B$이다. 집합 A, B의 모든 원소가 같아야 하므로 $a+1=7$ 이다.
즉 $a = 6$이고 집합 $B = \{7,\ 4,\ 6\}$이므로 $b = 4$이다. 따라서 $a \times b = 6 \times 4 = 24$이다.

12. 두 집합 $A=\{x|x$는 10 이상 15 이하의 자연수$\}$, $B=\{x|x$는 12 이상 18 미만의 3 의 배수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X)=4$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A=\{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
$B=\{12,\ 15\}$
$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4 개인 집합이므로
$\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$,
$\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$의 6 개이다.

13. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 일 때, 적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 A 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 48 개　② 44 개　③ 40 개　④ 35 개　⑤ 32 개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
짝수로만 이루어진 부분집합은 $\{2,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 의 부분집합 중 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는 $2^4 - 1 = 15$(개) 이다.
A 의 전체 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$(개) 이고 그 중 공집합을 제외한 것은 63 개이다.
적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 부분집합을 짝수로만 이루어진 부분집합을 제외한 것이므로 구하는 개수는 $63 - 15 = 48$(개) 이다.

14. 두 집합 $A = \left\{x \mid x\text{는 } 4 \text{ 의 약수}\right\}$,
$B = \{x \mid x\text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수 중 약수가 } 2\text{개인 수}\}$에 대하여 $P = \{x \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$,
$Q = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 일 때,
$P \cap Q$ 를 원소나열법으로 나타내여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{3, 4, 5, 6\}$

해설

$A = \left\{x \mid x\text{는 } 4 \text{ 의 약수}\right\} = \{1, 2, 4\}$
$B = \{x \mid x\text{는 } 5\text{이하의 자연수 중 약수가 } 2\text{개인 수}\} = \{2, 3, 5\}$

먼저 집합 P 의 원소를 구해보면 다음과 같다.

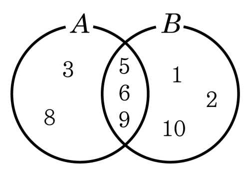
$B \backslash A$	1	2	4
2	3	4	6
3	4	5	7
5	6	7	9

$\therefore P = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
다음으로 집합 Q 의 원소를 구해보면 다음과 같다.

$B \backslash A$	1	2	4
2	2	4	8
3	3	6	12
5	5	10	20

$\therefore Q = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20\}$
그러므로 $P \cap Q = \{3, 4, 5, 6\}$

15. 다음 벤 다이어그램에서 $A \cap B$ 의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A \cap B$ 은 A 에도 속하고 B 에 속하는 원소들이다.
그러므로 벤 다이어그램에서 보는 것과 같이 $A \cap B = \{5, 6, 9\}$ 이다.
$A \cap B$ 의 원소의 합은 $5 + 6 + 9 = 20$ 이다.

16. 두 집합 $A = \{4,\ 6,\ x\}$, $B = \{1,\ 3,\ x+3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 를 만족할 때, x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, x, x+3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
$x = 2,\ x+3 = 5$ 이다. 따라서 $x = 2$

17. 두 집합 A, B에 대하여 $A = \{2, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16\}$, $B = \{1, 3, 8, 10, 13, 16\}$ 이고 $B \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족할 때 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $B \subset X$　　② $X \subset (A \cup B)$

③ $(A \cap B) \subset X \subset B$　　④ $(A \cap B) \subset X \subset A$

⑤ $\{10,\ 13\} \subset X$

해설

$B \cap X = X$ 일 때 $X \subset B$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 이면 $(A \cap B) \subset X$ 를 만족한다.

① $X \subset B$ 이므로 옳지 않다.

④ $(A \cap B) \subset X \subset B$ 이지만 $X \subset A$ 라고 할 수 없기 때문에 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 라고 할 수 없다.

⑤ $\{10,\ 13\} \subset A \cap B$ 이므로 $\{10, 13\} \subset X$ 이다.

18. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

$A \cap \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 10\}$
$A \cup \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$A \cap \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 10\}$ 에서 집합 A 는 원소 4, 10 을 포함하고, 원소 8, 12 는 포함하지 않는다.
또 $A \cup \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ 에서 집합 A 는 원소 5, 6, 9, 11 을 포함한다.
$\therefore\ A = \{4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이다.

19. 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$이면 $A \cap B = A$이다.

② $A \subset B$이면 $A^c \subset B^c$이다.

③ $B - A = A^c \cap B$

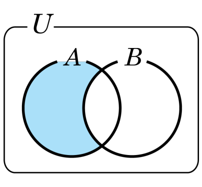
④ $A \cap \varnothing^c = A$

⑤ $U - \varnothing = A \cap A^c$

해설

② $A \subset B$이면 $A^c \supset B^c$이다.
④ $A \cap \varnothing^c = A \cap U = A$
⑤ $U - \varnothing = U = A \cup A^c$

20. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 ?



① $A-B$ 라고 쓰며, A 마이너스 B 라고 읽는다.

② A 에도 속하고 B 에도 속하는 원소들로 이루어진 집합이다.

③ $A-B=\{x | x \in A$ 그리고 $x \notin B\}$

④ $A-B=B-A$

⑤ $A-B=A \cap B^c$

해설

① $A-B$ 라고 쓰며, A 차집합 B 라고 읽는다.
② A 에는 속하지만 B 에도 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합이다
④ $A-B \neq B-A$

21. 두 집합 $A = \{3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$, $B = \left\{x | x\text{는 } 3 \le x \le 5\text{인 자연수}\right\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$B = \{3,\ 4,\ 5\}$

$(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\{6,\ 8,\ 9,\ 11\} \subset X \subset \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 6, 8, 9, 11 을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)

22. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

㉠ $ab = 0$	㉡ $a^2 + b^2 = 0$
㉢ $a^2 + b^2 > 0$	㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$
㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$	㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$	㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$	

① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦

④ ㉥와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$ab \;\leftrightarrow\; a = 0$ 또는 $b = 0$

$a^2 + b^2 \;\leftrightarrow\; a = 0$ 이고 $b = 0$

$a^2 + b^2 > 0 \;\leftrightarrow\; a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

$ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

23. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \geq (ax+by+cz+dw)^2$이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

> [증명] 모든 실수 t에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
> $(at-x)^2+(bt-y)^2+(ct-z)^2+(dt-w)^2$ $\boxed{㉠}$ 0
> 이것을 t에 관하여 정리하면
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)t^2-2(ax+by+cz+dw)t$
> $+(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉠}$ 0
> 따라서 항상 성립하기 위해서는
> $(ax+by+cz+dw)^2-$
> $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ $\boxed{㉡}$ $0 \cdots\cdots$ (이하 생략)

① $>$, $<$　② $\geq$, $<$　③ $\leq$, $>$　④ $\leq$, $\geq$　⑤ $\geq$, $\leq$

해설

생략

24. 근영이는 이번 생일에 남자친구한테 저금통을 선물받았다. 이 저금통은 비밀번호가 다섯 자리 수로 된 자물쇠가 달려있고 비밀번호는 다음 문제를 풀어야 알 수 있다.
다음 문제를 보고, 비밀번호가 될 수 있는 다섯 숫자를 원소나열법으로 나타내어라.

> 두 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 4, 6\}$ 에 대하여, 자물쇠의 비밀번호는 집합 A 에서 홀수인 원소와 집합 B 에서 짝수인 원소를 합친 것이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 2, 3, 4, 6\}$

해설

집합 A 에서 홀수인 원소는 1, 3, 집합 B 에서 짝수인 원소는 2, 4, 6 이므로 자물쇠의 비밀번호는 1, 2, 3, 4, 6 으로 되어있다.

25. 주사위 A, B 두 개를 던저서 나올 수 있는 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

① 6 ② 12 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33 \cdots 64, 65, 66\}$

$n(A) = 36$

26. 집합 $S = \left\{x \mid x < 100, x\text{는 자연수}\right\}$ 의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족할 때 A^c 의 원소 중 가장 큰 수를 구하여라.

(가) $4 \in A,\ 5 \in A$ (나) $p \in A,\ q \in A$ 이면 $p + q \in A$

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$4, 5$ 는 집합 A 의 원소가 될 수 있는 수들을 나열해 보면
$4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ \cdots, 99$ 이다.
따라서 $A^c = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ 이고,
A^c 에서 가장 큰 원소는 11 이다.

27. 집합 $U = \{x|x \leq 10,\ x$는 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 가 있다. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$U = \{x|x \leq 10,\ x$는 자연수$\} = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ 집합 A , B 는 서로소이고, 전체집합 U 의 모든 원소를 나누어 가진다.
전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$ 이고,
A 의 모든 원소의 합은 15 이므로
집합 B 의 모든 원소의 합은 $55 - 15 = 40$

28. 전체집합 $U = \{1,3,5,7,9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1,9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C$
$= A \cap (A^C \cup B)$
$= (A \cap B) = \{1\}$

$A = \{1,9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1,3,5,7,9\}$ 을 만족하는
집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로
집합 B 의 개수는 $2^3 = 8$(개)

29. 두 집합 P, Q 에 대하여 집합의 연산 $\triangle$ 을 $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ 로 약속할 때, $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$ 에 대하여 다음과 같다면 a 의 값은?

$(A \triangle B) \triangle C = \{1, 4, 9\}$

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B = \{2, 4, 8\}$, $C = \{4, a\}$
$A \triangle B = \{1\}$, $\{1\} \triangle C = \{1, 4, 9\}$를 만족하려면 집합 C 에는 1은 없어야 하고 9는 있어야한다.
$\therefore a = 9$

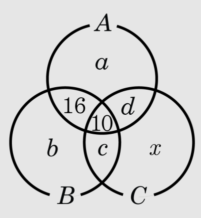
30. 60 명의 학생이 세 클럽 중 적어도 한 클럽에 속해 있다. 그 학생의 집합을 각각 A, B, C 라 할 때. $n(A) = 42$, $n(B) = 36$, $n(C) = 27$, $n(A \cap B \cap C) = 10$, $n(A \cap B) = 26$ 일 때, C 에만 속하는 학생수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 명

▷ 정답 : 8 명

해설

다음 벤다이어그램에서 구하는 학생수는 x 이다.



$n(A \cup B \cup C) = 60$ 이므로 $a + b + c + d + x = 34 \cdots$ ㉠

$a + d = 16, b + c = 10$ 이므로 $a + b + c + d = 26 \cdots$ ㉡

㉠ - ㉡ : $x = 8$

31. 우리반 학생을 40 명을 대상으로 조사를 하였더니 비행기를 타본 학생이 25 명, 배를 타 본 학생이 13 명이다. 비행기도 배도 타보지 못한 학생 수의 최댓값을 a , 최솟값을 b 이라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

조사한 학생의 집합을 U , 비행기를 타 본 학생의 집합을 A , 배를 타 본 학생의 집합을 B 라 하면

$n(U)=40,\ n(A)=25,\ n(B)=13$

$A\cap B=\varnothing$ 일 때, $n(A\cup B)$ 이 최대이므로 $n(A\cup B)$ 의 최댓값은 $25+13=38$ 이다.

$\therefore (n((A\cup B)^c)$의 최솟값$)=a=40-38=2$

$A\subset B$ 일 때, $n(A\cup B)$ 이 최소이므로 $n(A\cup B)$ 의 최솟값은 $n(A)=25$ 이다.

$\therefore (n((A\cup B)^c)$의 최댓값$)=b=40-25=15$

따라서 $a+b=17$ 이다.

32. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A, B, C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

A : 선희가 1 등, 경진이가 3 등을 했습니다. B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다. C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

① 1등 : 경진, 2등 : 준화, 3등 : 정하, 4등 : 선희

② 1등 : 선희, 2등 : 정하, 3등 : 경진, 4등 : 준화

③ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 경진, 4등 : 선희

④ 1등 : 정하, 2등 : 경진, 3등 : 준화, 4등 : 선희

⑤ 1등 : 정하, 2등 : 준화, 3등 : 선희, 4등 : 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.
그러면, 경진이가 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.
따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.

33. $0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$인 실수 $x,\ y,\ z$가 $x + y + z = 2$를 만족시킬 때, $k = xy + yz + zx$가 가질 수 있는 값의 범위는?

① $1 < k \le \frac{4}{3}$　　② $1 \le k < \frac{4}{3}$　　③ $0 < k < 2$

④ $0 < k \le 2$　　⑤ $1 < k < 3$

해설

$x < 1,\ y < 1$에서 $1 - x > 0,\ 1 - y > 0$이므로 $(1 - x)(1 - y) > 0$
양변에 $x + y - 1$을 더하고 좌변쪽을 음수로 묶어주면
$xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1$
마찬가지방법으로 $yz,\ zx$를 구하여 보면

$$\begin{cases} xy = (1 - x)(1 - y) - (1 - x - y) > x + y - 1 \\ yz = (1 - y)(1 - z) - (1 - y - z) > y + z - 1 \\ zx = (1 - z)(1 - x) - (1 - z - x) > z + x - 1 \end{cases} \quad \text{에서}$$

$xy + yz + zx > 2(x + y + z) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
또, $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$에서 ($\because\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \ge 0$ 에서 양 변에 $3(xy + yz + zx)$를 더한다)
$4 \ge 3(xy + yz + zx)$
$\therefore\ 1 < xy + yz + zx \le \frac{4}{3}$

34. 두 사람 갑, 을이 같은 거리를 여행하는데, 갑은 거리의 반을 a의 속력으로, 나머지 거리를 b의 속력으로 가고, 을은 총 걸린 시간 중 반을 a의 속력으로, 나머지 시간을 b의 속력으로 갔다. 각각의 평균속력을 A, B라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\mathrm{A} \le \mathrm{B}$ ② $\mathrm{A} \ge \mathrm{B}$ ③ $\mathrm{A} = \mathrm{B}$
④ $\mathrm{A} < \mathrm{B}$ ⑤ $\mathrm{A} > \mathrm{B}$

해설

거리를 l이라 하고, 갑이 걸린 시간을 t_1이라 하면

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{b}$$

따라서 A의 평균속력은

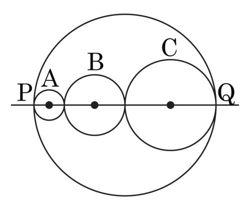
$$\mathrm{A} = \frac{l}{t_1} = \frac{l}{\frac{l}{2a} + \frac{l}{2b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

또, 을의 평균속력은 $\mathrm{B} = \frac{1}{2}(a+b)$

그런데, $\frac{1}{2}(a+b) \ge \frac{2ab}{a+b}$ 이므로

$\mathrm{B} \ge \mathrm{A}$

35. 다음 그림에서와 같이 외접하고 있는 구 A, B, C가 있다. 겉넓이의 총합이 40π일 때, 현재의 반지름을 각각 2배, 4배, 6배 증가시켰을 때, 점 P에서 Q까지 길이의 최댓값은?



① $4\sqrt{35}$　② $6\sqrt{35}$　③ $8\sqrt{35}$　④ $10\sqrt{35}$　⑤ $12\sqrt{35}$

해설

A, B, C의 반지름을 x, y, z라 하면
구의 겉넓이는
$S_1 = 4\pi x^2$, $S_2 = 4\pi y^2$, $S_3 = 4\pi z^2$
$4\pi(x^2+y^2+z^2) = 40\pi$
$\therefore x^2+y^2+z^2 = 10$
$(x^2+y^2+z^2)(2^2+4^2+6^2) \geq (2x+4y+6z)^2$
$10 \cdot 56 \geq (2x+4y+6z)^2$
$4\sqrt{35} \geq 2x+4y+6z$
PQ의 길이의 최댓값은 $2(2x+4y+6z)$이므로 $8\sqrt{35}$