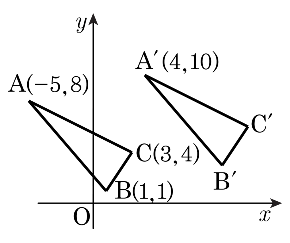
1. 다음 그림의 삼각형 A′B′C′ 은 삼각형 ABC 를 평행이동한 도형이다. 두 점 B′, C′ 을 지나는 직선의 방정식이 $ax+by=24$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a , b 는 상수)



① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

해설

△A′B′C′ 는 △ABC 를 x 축 방향으로 9 만큼, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 도형이므로 B′(10, 3), C′(12, 6) 이다.
두 점 B′, C′ 를 지나는 직선의 방정식은
$y-3=\frac{6-3}{12-10}(x-10)$
$3x-2y=24$,
$\therefore a+b=1$

2. 점 $(1,2)$ 를 점 $(-2,-1)$ 로 옮기는 평행이동에 대하여 직선 $y=-2x+k$ 로 옮겨질 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

점 $(1,2)$ 를 점 $(-2,-1)$ 로 옮기는 평행이동을
$T:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 이라고 하면,
$(1,2)\xrightarrow{T}(-2,-1)$ 에서
$1+m=-2, 2+n=-1 \qquad \therefore m=-3, n=-3$
$\therefore T:(x,y)\to(x-3,y-3)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -3 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 옮기는 평행이동이다.
평행이동 $T:(x,y)\to(x-3,y-3)$ 에 의하여
직선 $y=-2x+k$ 는
직선 $y+3=-2(x+3)+k$로 옮겨진다.
이 때, 이 직선이 원점을 지나므로
$x=0,\ y=0$ 을 대입하면
$3=-6+k \qquad \therefore k=9$

3. 원 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 점 $(1,0)$ 을 지난다고 한다. 이 때, 점 (a,b) 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ $\frac{7}{3}\pi$

해설

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=1$
이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$(x-a-1)^2+(y-b+2)^2=1$
이 원이 점 $(1,0)$ 을 지나므로
$(-a)^2+(-b+2)^2=1$
$\therefore a^2+(b-2)^2=1$
따라서, 점 (a,b) 가 나타내는 도형은
중심이 $(0,2)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로
구하는 도형의 길이는 2π 이다.

4. 원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 시켜 얻어진 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동 시켰더니 x 축에 접하였다. 이 때, p 의 값은?

① 0 ② ±1 ③ ±2 ④ ±3 ⑤ ±4

해설

원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여
대칭이동 시키면 $y^2 + (x-3)^2 = 1$ 이 된다.
이 도형을 다시 y 축 방향으로 p 만큼 평행이동
시킨다고 했으므로 구하는 도형의 방정식은
$(y-p)^2 + (x-3)^2 = 1$ 이다.
이 도형이 x 축에 접한다고 했으므로
p 는 ±1

5. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① (1, 1) ② (1, 2) ③ (−1, 1)
④ (−1, −1) ⑤ (1, −1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 O(0, 0) 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 A(2, 2) 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 P(1, 1) 이다.

6. 점 $(2,\ 1)$ 을 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 (a, b) 라 할 때, $50ab$ 의 값을 구하면?

① 112　② 128　③ 144　④ 156　⑤ 160

해설

i) $(2,1)$과(a,b) 의 중점은 $y=\frac{1}{2}x+1$ 위에 있다.

$\Rightarrow\ \ \frac{1+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+2}{2}\right)+1$

$\Rightarrow\ \ a-2b+4=0$

i) $(2,1)$과(a,b) 를 잇는 선분의 기울기는 -2 이다

$\Rightarrow\ \ \frac{b-1}{a-2}=-2$

$\Rightarrow\ \ 2a+b-5=0$

ii) 과 ii) 를 연립하면, $a=\frac{6}{5}\ \ b=\frac{13}{5}$

$\therefore\ \ 50ab=156$

7. 좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 $A(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이편 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다. ㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1만큼 이동한다. ㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

8. 직선 $x-3y+1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 직선이 원 $(x-m)^2+(y-n)^2=5$ 의 넓이를 이등분할 때, $3m+n$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$x-3y+1=0$ 의 x 축 대칭 $(y \to -y)$

$\to \ x+3y+1=0$

$x+3y+1=0$ 의 $y=-x$ 축 대칭 $(x \to -y,\ y \to -x)$

$\to \ -y-3x+1=0,\ \ y=-3x+1$

이 직선이 $(x-m)^2+(y-m)^2=5$ 의 넓이를

이등분하므로 $(m,\ n)$ 을 지난다.

$\therefore\ 3m+n=1$

9. 포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y = x - 1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

$y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y - a) = x^2, \quad y = -x^2 + a$
이 곡선이 $y = x - 1$ 에 접하려면
$x - 1 = -x^2 + a$, $x^2 + x - a - 1 = 0$ 에서
$D = 1^2 - 4(-a - 1) = 0$
$\therefore \ a = -\frac{5}{4}$

10. 점 $(-2,\ 1)$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -5 ④ -3 ⑤ -2

해설

두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의
중점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$\frac{1+b}{2}=\frac{-2+a}{2}-1$,

$\therefore\ a-b=5\ \cdots$ ㉠

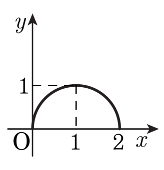
또, 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 직선의
기울기가 -1 이므로 $\frac{b-1}{a-(-2)}=-1$

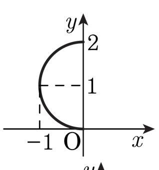
$\therefore\ a+b=-1\ \cdots$ ㉡

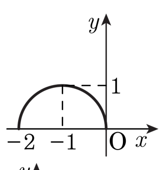
㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

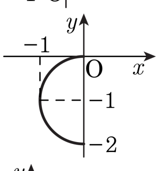
$\therefore\ ab=-6$

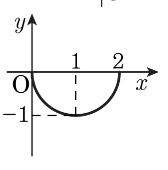
11. 도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프로 옳은 것은?

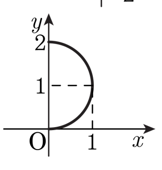


①


②


③


④


⑤


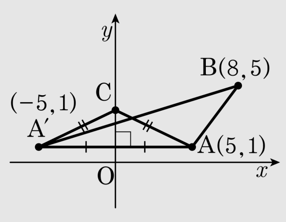
해설

도형 $f(-y,\ -x)=0$ 의 그래프는
도형 $f(x,\ y)=0$ 의 그래프를
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동 한 것이다.

12. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5,1)$, $\mathrm{B}(8,5)$ 와 y 축 위의 점 C 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle \mathrm{ABC}$ 의 둘레의 길이의 최솟값이 $5+\sqrt{a}$ 일 때, a 의 값은?

① 180　② 185　③ 190　④ 195　⑤ 200

해설



점 $\mathrm{A}(5,1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}$ 이라하면 $\mathrm{A'}(-5,1)$

또, 다음 그림에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{A'C}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$

$=\sqrt{(8-5)^2+(5-1)^2}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{A'C}}$

$\geq 5+\overline{\mathrm{A'B}}$

$=5+\sqrt{\{8-(-5)\}^2+(5-1)^2}$

$=5+\sqrt{185}$

$\therefore a=185$

13. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 5)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$ 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$　　② $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

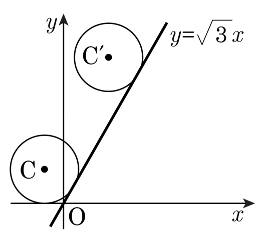
③ $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $2\sqrt{10}$　　④ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 X축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 $\mathrm{B}'(1,\ -1)$과 점 A와의 거리가
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이다.
$\sqrt{(3-1)^2+(5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
이때 점 P의 좌표는 점 B′와 점 A를 지나는
직선의 방정식의 x 절편이다.
즉 직선 AB′ : $y-5=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$
$\therefore\ y=3x-4$
따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$

14. 다음 그림과 같이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 x 축에 접하는 반지름의 길이가 1인 C : $(x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (y-1)^2 = 1$ 이 있다. 이것을 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위로 두 바퀴 굴려 원 C' 의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?



① $\frac{3+\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}+1)\pi$ ② $\frac{3-\sqrt{2}}{3} + (2\sqrt{2}-1)\pi$
③ $\frac{3+\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$ ④ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$
⑤ $\frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+1)\pi$

해설

i) 원 C 와 원 C' 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이므로

$\frac{b-1}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$ 에서

$b = \sqrt{3}a + 2$

ii) 원이 두 바퀴 굴러 갔으므로 원 중심 사이의 거리는 4π 이다.

$\Rightarrow \quad (a + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (b-1)^2 = 16\pi^2$

i) 을 ii) 에 대입하여 정리하면,

$4a^2 + \frac{8}{3}\sqrt{3}a + \frac{4}{3} = 16\pi^2$

$3a^2 + 2\sqrt{3}a + 1 = 12\pi^2$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{3}a+1)^2 = (2\sqrt{3}\pi)^2$

$\Rightarrow \quad a = \frac{2\sqrt{3}\pi - 1}{\sqrt{3}} \ (\because a > 0)$

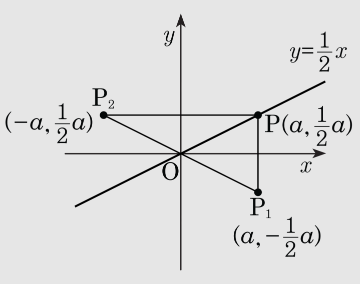
$\Rightarrow \quad b = 2\sqrt{3}\pi + 1$

$\therefore \quad a + b = \frac{3-\sqrt{3}}{3} + (2\sqrt{3}+2)\pi$

15. 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$ 를 x 축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2 라 하자. $\triangle \mathrm{PP}_1\mathrm{P}_2$ 의 넓이가 4일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설



점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$, x축 대칭 : $\mathrm{P}_1\left(a,\ -\frac{1}{2}a\right)$, y축 대칭 : $\mathrm{P}_2\left(-a,\ \frac{1}{2}a\right)$

$\triangle \mathrm{PP}_1\mathrm{P}_2$는 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{PP}_2=90°$ 인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{\mathrm{PP}_1}\times\overline{\mathrm{PP}_2}\times\frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{\mathrm{PP}_1}=a$, $\overline{\mathrm{PP}_2}=2a$

$\therefore a\times 2a\times\frac{1}{2}=4$

$a=\pm 2$

$a>0$ 이므로 $a=2$, $b=\frac{1}{2}a=1$

$\therefore a+b=3$

16. 두 점 A$(a,\ b)$, B$(c,\ d)$ 가 직선 $y=mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a+b=c+d$　　② $a+c=b+d$

③ $ab=cd$　　④ $ac=bd$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 $y=mx$ 에 수직한다.

$\Rightarrow \dfrac{d-b}{c-a}\times m=-1$

$\Rightarrow (a-c)=m(d-b)\cdots$①

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 $y=mx$ 위에 있다.

$\Rightarrow \dfrac{b+d}{2}=m\left(\dfrac{a+c}{2}\right)$

$\Rightarrow b+d=\ m(a+c)\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$a-c=\dfrac{b+d}{a+c}(d-a)$

$\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$

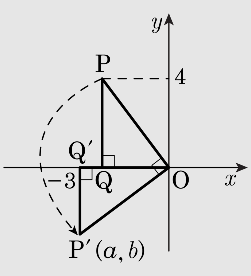
17. 두 변환 $f,\ g$가 다음과 같이 주어졌을 때, $(g \circ f)(-2,\ 3)$을 구하면?

$f : (x, y) \rightarrow (x-1, y+1)$ $g : (x, y)$를 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 $90\ °$회전시킨다.

① $(4,\ 3)$ ② $(3, -4)$ ③ $(-4, -3)$
④ $(-4, -1)$ ⑤ $(4, -3)$

해설

합성변환의 정의에 의해 $(g \circ f)(-2,\ 3)$을 풀면
$(g \circ f)(-2,\ 3) = g(f(-2,\ 3)) = g(-3, 4)$
주어진 정의에 의해 $g(-3,\ 4)$ 는 점 $(-3, 4)$를 원점을 중심으로 하여 반시계방향으로 회전시킨 것이므로
그림에서와 같이 $\mathrm{P}(-3, 4)$에 대해 회전 이동된 점 $\mathrm{P}'(a, b)$를 정하면



$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP'}}$ (회전축) ⋯⋯ ①
$\angle \mathrm{POQ} = \angle \mathrm{OP'Q'}$ ⋯⋯ ②
$\angle \mathrm{OQP} = \angle \mathrm{OQ'P'}$ ⋯⋯ ③
①, ②, ③에 의해 $\angle \mathrm{OPQ} \equiv \angle \mathrm{P'OQ'}$
따라서, 대응변으로 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{P'Q'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{OQ'}}$ 다.
이를 제사분면의 좌표로 나타내면 $\mathrm{P}(-4, -3)$

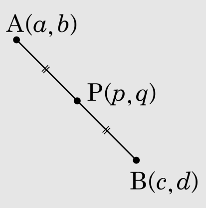
18. 점 $(p,\ q)$ 의 점 $(-3,\ 2)$ 에 대한 대칭점을 점$(m,\ n)$ 이라 하고, 점 $(p,\ q)$ 가 직선 $y=-3x+2$ 위를 움직일 때, 점 $(m,\ n)$ 이 움직이는 도형의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, $a,\ b,\ c$ 는 서로 소이다.)

▶ 답:

▷ 정답: $a+b+c=20$

해설

점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$ 가 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$ 에 대하여 대칭이면



($\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점의 좌표) $=$ (점 P 의 좌표)

두 점 $(p,\ q)$, $(m,\ n)$ 의 중점이 점 $(-3,\ 2)$ 이므로

$\left(\dfrac{p+m}{2},\ \dfrac{q+n}{2}\right)=(-3,\ 2)$

$\therefore\ p=-m-6,\quad q=-n+4$

또한 점 $(p,\ q)$ 는 직선 $y=-3x+2$ 위를 움직이므로

$q=-3p+2$ 즉, $-n+4=-3(-m-6)+2$,

$3m+n+16=0$

$\therefore$ 점 $(m,\ n)$ 이 움직이는 도형의 방정식은

$3x+y+16=0$

따라서, $a=3,\ b=1,\ c=16$이므로

$a+b+c=20$

19. 두 점 A(a, b) 와 B(c, d) 가 직선 l : $x+y=1$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, a, b, c, d 의 관계식으로 바르게 짝지어진 것은? (단, 두 점 A, B 는 직선 위에 있지 않다.)

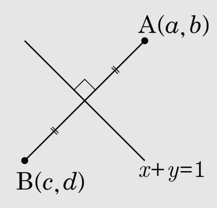
㉠ $a+b=c+d$	㉡ $a+c=b+d$
㉢ $a+d=b+c$	㉣ $a+b+c+d=0$
㉤ $a+b+c+d=1$	㉥ $a+b+c+d=2$

① ㉠, ㉣　② ㉡, ㉤　③ ㉢, ㉥

④ ㉠, ㉤　⑤ ㉢, ㉣

해설

두점 AB 가 직선 l 에 대하여 대칭이면



(i) 선분 AB 와 직선 l 은 수직이다.

$\frac{d-b}{c-a}(-1)=-1$

$d-b=c-a$

$a+d=b+c$

(ii) AB 의 중점 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ 가 직선 l 위에 있다.

$\frac{a+c}{2}+\frac{b+d}{2}=1$

$\therefore\ a+b+c+d=2$

20. 정점 $A(3,\ 2)$ 과 직선 $y = x + 1$ 위를 움직이는 동점 P , x 축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

① $\sqrt{10}$　② $2\sqrt{10}$　③ $3\sqrt{10}$　④ $4\sqrt{10}$　⑤ $5\sqrt{10}$

해설

점$(x,\ y)$ 를 직선 $y = x + k$ 에 대하여
대칭이동하면 $(y - k,\ x + k)$
점 A 의 $y = x + 1$ 에 대한 대칭점을 A' ,
점 A 의 x 축에 대한 대칭점을 A'' 이라 하면
$A'(1,\ 4)$, $A''(3,\ -2)$
$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} =$
$\overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \geq \overline{A'A''}$ 이므로
한편, $\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-4)^2} = 2\sqrt{10}$
따라서, 최솟값은 $2\sqrt{10}$