1. 다음 중 부분집합의 개수가 16 개인 집합은?

① $\{x \mid x$는 5의 약수$\}$

② $\{x \mid x$는 17보다 작은 자연수$\}$

③ $\{x \mid x$는 15보다 작은 홀수$\}$

④ $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

⑤ $\{x \mid x$는 6의 약수$\}$

해설

① $2^2 = 4$ (개)
② 2^{16} (개)
③ $2^7 = 128$ (개)
④ $2^5 = 32$ (개)
⑤ $2^4 = 16$ (개)

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, $B \subset A$ 이고, $A \neq B$ 인 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 15 개

해설

$B \subset A$ 이고, $A \neq B$ 인 집합 B 는 집합 A 의 진부분집합이다.
따라서 집합 B 의 개수는 (집합 A 의 부분집합의 수) -1 (개) 가 된다.
따라서 $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ (개) 이다.

3. 집합 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 의 부분집합의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 16 개 ④ 32 개 ⑤ 64 개

해설

$\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 이므로 $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (개)

4. 집합 $A = \{x \mid x$는 4의 약수$\}$의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4\}$ 이므로 A 의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같다.
따라서 $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ (개) 이다.

5. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$

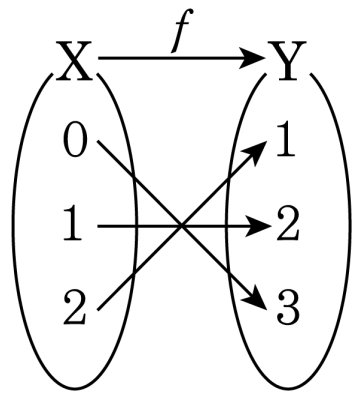
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$y = 2x - 2$, $x = \frac{1}{2}y + 1$ x, y 를 바꿔주면

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 1$

6. 다음 그림의 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2) = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1$

$\therefore \ f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$

7. 함수 $y = x - 2$의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$ ② $y = x + 2$ ③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$를 x에 관해서 풀면

$x = y + 2$

x와 y를 바꾸면 $y = x + 2$

8. 함수 $y = -x - 1$의 역함수의 그래프에서 x절편을 a, y절편을 b라 할 때, ab의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x - 1$에서 $x = -y - 1$
여기서 x와 y를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$
따라서 x절편 $a = -1$, y절편 $b = -1$이므로
$ab = 1$

9. 함수 $f(x)=ax+b$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2$일 때, $a+b$의 값은 얼마인가? (단 a, b는 실수)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$\left(f^{-1}\right)^{-1}(x)=f(x)$이므로

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+2$의 역함수는

$f(x)=ax+b$이다.

$y=\frac{1}{3}x+2$로 놓고 x, y를 서로 바꾸면

$x=\frac{1}{3}y+2,\ y=3x-6$

$a=3,\ b=-6$

$\therefore a+b=-3$

10. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$

그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$

$\therefore\ \frac{1}{a} = a$ 이고 $\frac{1}{a} = -1$ 이어야 하므로

$\therefore\ a = -1$

11. 일차함수 $y = px + q$ 의 역함수가 $y = -5x + 7$ 일 때, 상수 p, q 의 합 $p + q$ 는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ 4 ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 8

해설

$y = -5x + 7$ 의 역함수를 구하면

$x = -5y + 7,\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$

$p = -\frac{1}{5},\ q = \frac{7}{5}$

$\therefore p + q = \frac{6}{5}$

12. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

해설

$y = 2x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면

$x = \frac{1}{2}y + 1$ x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + 1$

13. 집합 A 에 대하여 $\square$ 안에 공통으로 들어가는 집합을 써넣라.

(1) $A \cup \varnothing = \square$

(2) $A \cap A = \square$

(3) $A \cup A = \square$

▶ 답 :

▷ 정답 : A

해설

(1) $\varnothing$ 은 집합 A 에 포함되므로 $A \cup \varnothing = A$ 이다.

(2) $A \cap A = A$

(3) $A \cup A = A$

14. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?(답 2 개)

① $A \cap A = \varnothing$

② $A \cap \varnothing = A$

③ $(A \cap B) \subset A$

④ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $B \subset (A \cap B)$

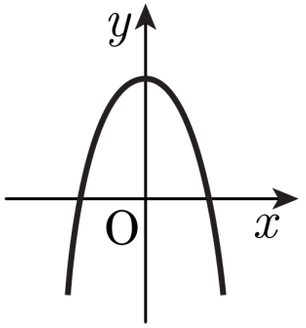
해설

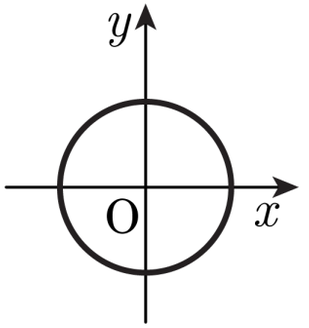
① $A \cap A = A$

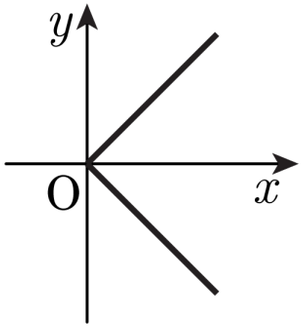
② $A \cap \varnothing = \varnothing$

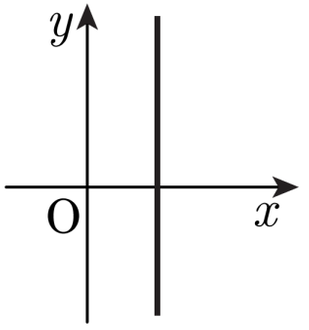
⑤ $(A \cap B) \subset B$

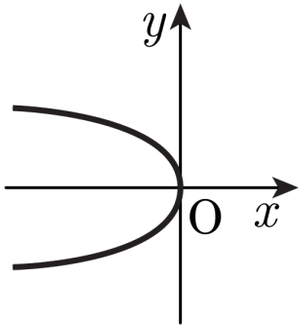
15. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

16. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+k & (x\geq 0) \\ -x+k & (x<0) \end{cases}$$ 가 $f^{-1}(2)=-3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f^{-1}(2)=-3$ 에서 $f(-3)=2$ 이므로

$f(-3)=3+k=2$

$\therefore\ k=-1$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x-1\ (x\geq 0) \\ -x-1\ (x<0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5)=5-1=4$

17. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 성립하는 것은?

① $A-(B\cup C)=(A-B)\cup(A-C)$

② $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

③ $A^c\cup(B\cap C)^c=U-(A\cup B\cup C)$

④ $A\cup(A\cap B)^c=\varnothing$

⑤ $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=B$

해설

① $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^c$
$=A\cap(B^c\cap C^c)$
$=(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)$
$=(A-B)\cap(A-C)$

② $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)$

③ $A^c\cup(B\cap C)^c=A^c\cup(B^c\cup C^c)$
$=A^c\cup B^c\cup C^c$
$=(A\cap B\cap C)^c$
$=U-(A\cap B\cap C)$

④ $A\cup(A\cap B)^c=A\cup(A^c\cup B^c)$
$=(A\cup A^c)\cup B^c$
$=U\cup B^c=U$

⑤ $(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A\cup(B\cap B^c)$
$=A\cup\varnothing=A$

18. 100가구가 사는 마을에서 A, B, C의 세 신문을 구독하고 있다. A, B, C의 신문을 보는 가구 수가 각각 45, 48, 50이고, 세 신문을 모두 보는 가구 수는 5이다. 이때, 한 종류의 신문만을 구독하는 가구 수는?(단, 신문을 보지 않는 가구는 없다.)

① 33가구 ② 40가구 ③ 62가구

④ 81가구 ⑤ 95가구

해설

마을 전체의 집합을 U, A, B, C 신문을 보는 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$n(A) = 45,\ n(B) = 48,\ n(C) = 50$

$n(A \cap B \cap C) = 5$

신문을 보지 않는 가구가 없으므로

$n(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0$

$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(U) = 100$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$

$-n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

이므로 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$

$= 45 + 48 + 50 - 100 + 5 = 48$

따라서 한 종류의 신문만을 구독하는 가구 수는

$n(U) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 2n(A \cap B \cap C)$

$= 100 - 48 + 2 \times 5 = 62$

19. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하고, $g(0)=5$ 라 한다. 또 $f(2x+1)=h(x)$ 라 하고, $h(x)$ 의 역함수를 $l(x)$ 라 할 때, $l(0)$ 의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$l(0)=k$라 하면 $h(k)=0$, $f(2k+1)=h(k)=0$

$f(5)=0$, $2k+1=5$, $k=2$

20. 다음은 'x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.' 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다) 에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

> 주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가) 이면 xy 도 (가) 이다.' 이다.
> $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
> $xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나) 가 된다.
> 따라서, 대우가 (다) 이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.' 이다.
$x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
$xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.