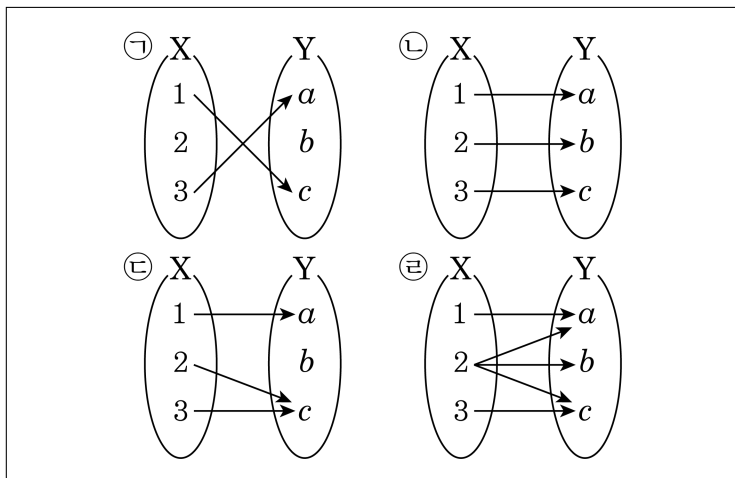


1. 다음 대응 관계 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

㉡, ㉢ X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.

㉣ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 a, b, c 의 3개이므로 함수가 아니다.

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ ax + b & (x > 1) \end{cases} \text{가 일대일대응이 되도록 하는 두 상수 } a, b$$

의 값으로 적당한 것은 무엇인가?

① $a = 1, b = -1$

② $a = 1, b = 1$

③ $a = 2, b = -1$

④ $a = 2, b = 0$

⑤ $a = -1, b = 2$

해설

f 가 일대일대응이 되려면

$y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y = ax + b$ 가

점 $(1, 1)$ 을 지나야 하므로

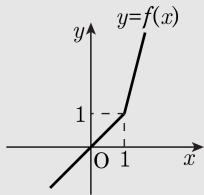
$$a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 직선 $y = x$ 의 기울기가 양이므로 직선 $y = ax + b$ 의 기울기도 양이어야 한다.

$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 주어진 보기 중 ㉠, ㉡을

모두 만족시키는 것은 ③이다.



3. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

a 에 대응하는 수가 b 에 대응해서는 안 되고
 a, b 에 대응하는 수가 c 에 대응해서는 안 되므로
 $\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24(\text{개})$

4. 집합 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a, b\}$ 라 할 때, 집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하면?

① 1 가지

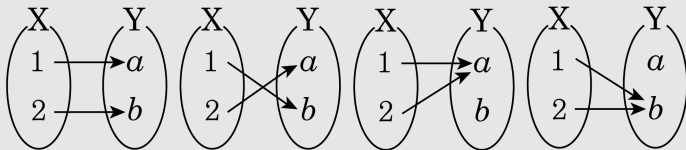
② 2 가지

③ 3 가지

④ 4 가지

⑤ 5 가지

해설



$\therefore$ 4가지

5. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 3가지

▷ 정답: 3가지

해설

함수 f 가 상수함수인 경우는

$$f(1) = f(2) = f(3) = a$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = b$$

$$f(1) = f(2) = f(3) = c \text{ 의 3가지이다}$$

6. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수를 구하면?

① 6 개

② 8 개

③ 18 개

④ 24 개

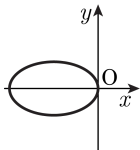
⑤ 27 개

해설

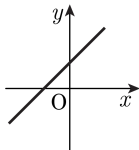
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

7. 다음 그래프 중 역함수를 갖는 것은?

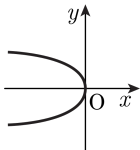
①



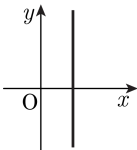
②



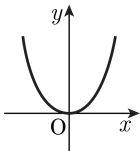
③



④



⑤

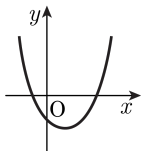


해설

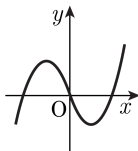
역함수를 갖는 것은 일대일 대응이다. $\Rightarrow$ ②

8. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

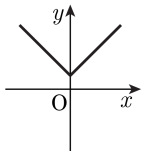
①



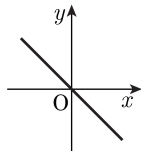
②



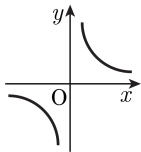
③



④



⑤



해설

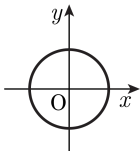
역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.

일대일 대응이란 변수 x, y 가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.

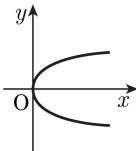
⑤ 변은 $x = 0$ 에 대응되는 y 가 없다.

9. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

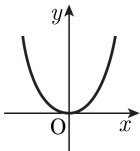
①



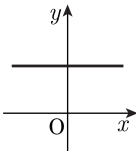
②



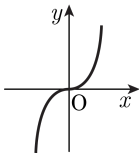
③



④



⑤

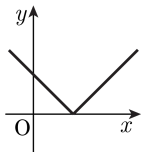


해설

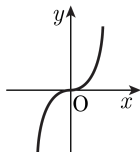
일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

10. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?

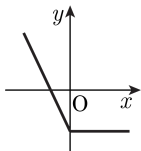
①



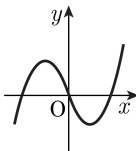
②



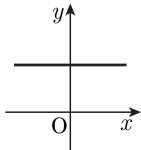
③



④



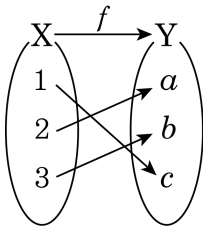
⑤



해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

11. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a) + f^{-1}(c)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

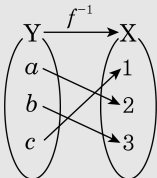
③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$$f^{-1}(a) + f^{-1}(c) = 2 + 1 = 3$$

12. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x + 12)$ 를 만족시키고 $f(1) = 3$ 일 때, $f(13) + f(37) - f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(13) = f(1 + 12) = f(1)$$

$$f(25) = f(13 + 12) = f(13) = f(1)$$

$$f(37) = f(25 + 12) = f(25) = f(1)$$

$$\text{따라서 준식은 } f(1) + f(1) - f(1) = f(1) = 3$$

13. 함수 $f(x) = x + 3$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

① 300

② 400

③ 500

④ 600

⑤ 700

해설

$$f^1(x) = x + 3$$

$$f^2(x) = f(f^1(x)) = f(x + 3) = x + 6$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 6) = x + 9$$

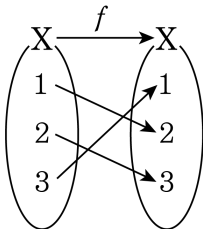
∴ 이므로

$f^n(x) = x + 3n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로
추정할 수 있다.

따라서, $f^{100}(x) = x + 300$ 이므로

$$f^{100}(100) = 100 + 300 = 400$$

14. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$ 의 값은?

① -2

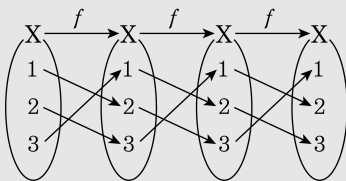
② 2

③ -1

④ 1

⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$$

같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.

$\therefore f^3(x) = x$ 이므로

$$f^{100}(x) = (f^{3 \cdot 33} \circ f)(x) = f(x),$$

$$f^{200}(x) = (f^{3 \cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$$

$$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2, f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$$

$$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$$

15. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \end{aligned}$$

...

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$

16. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002

② 2004

③ 2006

④ 2008

⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

17. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 일대일 대응은 몇 가지인가?

① 6

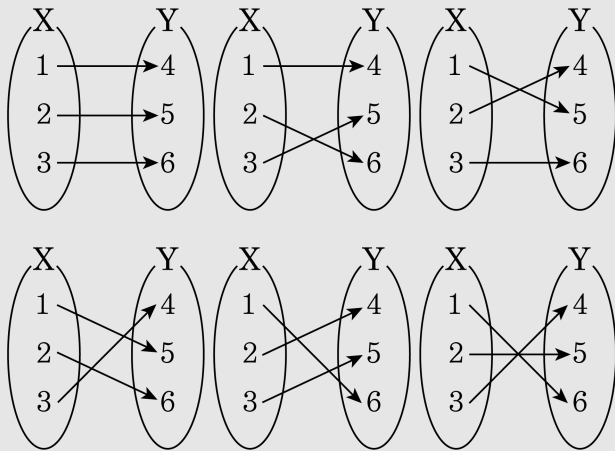
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



∴ 6가지

18. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 개수는?

- ① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64(\text{개})$

19. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?

① 3

② 6

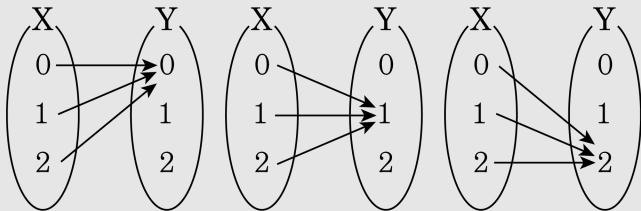
③ 9

④ 12

⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.



그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

20. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

a, b, c 에 대응하는 원소를

순서쌍 $(f(a), f(b), f(c))$ 으로 나타내면

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2),$

$(3, 2, 1)$ 이므로

X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6개이다.