1. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0, b)$가 있다. $\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 2 : 1$를 만족하는 점 P의 자취가 x축에 접할 때 b의 값을 구하여라.

해설

(1) 단계

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

(2) 단계

$\overline{\mathrm{AP}} = 2\overline{\mathrm{BP}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = 4\overline{\mathrm{BP}}^2$

즉, $(x-2)^2 + y^2 = 4\{x^2 + (y-b)^2\}$

(3) 단계

점 P의 자취가 x축에 접하므로 $y = 0$일 때

$(x-2)^2 = 4(x^2 + b^2)$

즉, $3x^2 + 4x + 4b^2 - 4 = 0$의 판별식 D가 0이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 4 - 3(4b^2 - 4) = 0$

(4) 단계

$4 - 3b^2 = 0$

$\therefore\ b = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
$\therefore\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$
이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로
$a^2 - 10b + 25 = 0,\ a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$
두 식을 연립하면
$4a^2 - 80a + 300 = 0,\ 4(a-5)(a-15) = 0$
그런데
$0 \le a \le 8$ 이므로 $a = 5,\ b = 5$ 이다.
이 때, 직선 AB 의 방정식은
$y - 5 = \dfrac{1-5}{8-0}(x-0)$
$\therefore\ x + 2y - 10 = 0$
따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는
$d = \dfrac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$

3. 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나므로 각각 대입하면,
$(1-a)^2+(4-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉠
$(3-a)^2+(2-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,
$a=1, b=2$ 또는 $a=9,\ b=10$
$\therefore$ 두 원의 반지름의 합은 $10+2=12$

4. 좌표평면 위의 두 정점 $A(3,\ 2)$, $B(6,\ 5)$ 에 대하여 선분 $\overline{PB}$ 의 길이가 선분 $\overline{PA}$ 의 길이의 2 배가 되는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y-1)^2=8$　② $(x-2)^2+(y-3)^2=20$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=10$　④ $(x-2)^2+(y-1)^2=17$
⑤ $(x-2)^2+(y-3)^2=20$

해설

$P(x,\ y)$ 라 하면, $\overline{PB}=2\overline{PA}$ 이므로
$\sqrt{(x-6)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$
$(x-6)^2+(y-5)^2=4\left\{(x-3)^2+(y-2)^2\right\}$
이것을 전개하여 정리하면,
$x^2-4x+y^2-2y-3=0$
$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=8$

해설

$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1$ 이므로
선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점과
$2:1$ 로 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원이다. (Apollonius)

5. 세 꼭짓점 $A(0, 0)$, $B(-5, 5)$, $C(2, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 7)$ ② $(-1,\ 4)$ ③ $(-2,\ 1)$
④ $(2,\ -2)$ ⑤ $(-4,\ -8)$

해설
무게중심 구하는 공식을 이용한다.
$$\left(\frac{0+(-5)+2}{3},\ \frac{0+5+7}{3}\right)=(-1, 4)$$

6. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

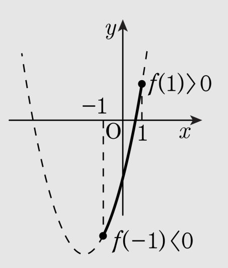
① $m > \frac{2}{9}$ ② $m > \frac{1}{7}$ ③ $m > -\frac{1}{3}$

④ $m < -\frac{1}{3}$ ⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$으로 놓을 때,

$f(x) = 0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$

$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$

$\therefore\ m > \frac{1}{7}$

7. 점 (1, 4) 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를 지나므로 구하는 기울기는 $\frac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$

8. 세 점 A(2, 5), B(−1, 3), C(3, −2)와 점 D를 꼭지점으로 하는 평행사변형 ABCD에서 점 D의 좌표를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: (6, 0)

해설

D의 좌표를 (x, y)라 하면 평행사변형 성질에 의해 선분 AC와 선분 BD의 중점은 같으므로

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$$

따라서 $(x, y) = (6, 0)$

9. 직선 $y=2x-1$에 대하여 점 $(3,\ 0)$의 대칭인 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b-a$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 0)$과 $(a,\ b)$의 중점은 $y=2x-1$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $y=2x-1$은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+0}{2}\right)$을

$y=2x-1$에 대입하면 $2a-b=-4\cdots$①

$y=2x-1$의 기울기가 2이므로 두 점을 지나는 기울기는

$\frac{b-0}{a-3}=-\frac{1}{2}$, $a+2b=3\cdots$②

따라서 ①, ②를 연립하면 $a=-1,\ b=2$

10. 두 점 $A(1,\ 0)$, $B(4,\ 0)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\dfrac{2\times 4+1\times 1}{2+1},\ 0\right)=(3,\ 0)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(\dfrac{2\times 4-1\times 1}{2-1},\ 0\right)=(7,\ 0)$

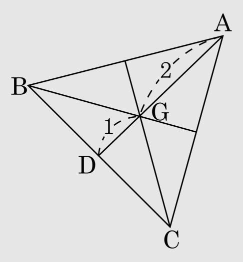
$\therefore$ 중심은 $(5,\ 0)$ 이고, 반지름은 2 인 원

$\Rightarrow$ 둘레의 길이는 $2\times 2\times \pi=4\pi$

11. A(2, 2) 인 정삼각형 ABC가 있다. 무게중심이 원점일 때, 이 정삼각형의 한변의 길이를 구하면?

① $3\sqrt{3}$　　② $2\sqrt{6}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ $2\sqrt{3}$

해설



무게중심은 그림처럼 중선을 2 : 1로 내분한다.

$\therefore\ \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

그리고 $\triangle ABC$는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$

$\therefore a = 2\sqrt{6}$

12. 점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B$(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$위에 있으므로

$4\cdot\frac{1+a}{2}-2\cdot\frac{2+b}{2}-5=0$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\frac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

$\therefore\ \mathrm{B}(3,\ 1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

13. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y+3)^2=4$
② $(x+2)^2+(y-3)^2=4$
③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$
④ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
⑤ $(x+3)^2+(y-2)^2=4$

해설

원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

14. x 축 및 y 축에 접하고 원 $(x-7)^2+(y-6)^2=4$ 에 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 10 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

해설

조건을 만족하는 원은 제1 사분면에서 두 개 존재한다. 원의 반지름을 a 라 하면, 중심의 좌표는 $(a,\ a)$ 이다. 주어진 원과 외접하기 위해서는 두 원의 중심 간의 거리가 반지름의 합과 같으면 된다.

$\sqrt{(7-a)^2+(6-a)^2}=a+2$

양변 제곱하여 정리하면,

$2a^2-26a+85=a^2+4a+4$

$a^2-30a+81=0$

따라서, 두 개의 원의 반지름은 $3, 27$ 이고 그 합은 근과 계수와의 관계에서 30

15. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$3x-y-6=0\ ,\quad 3x-y+k=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선
$3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times 2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

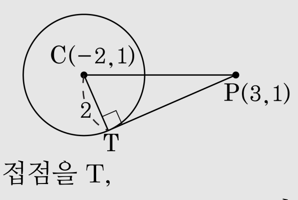
16. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{7}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{17}$　⑤ $\sqrt{21}$

해설

원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 을 표준형으로 고치면

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$



아래 그림과 같이 원 밖의 한 점 $\mathrm{P}(3,1)$ 에서 이 원에 접선을 그어 그 접점을 T, 원의 중심을 $\mathrm{C}(-2,1)$ 이라고 하면 $\triangle\mathrm{PTC}$ 는 $\angle\mathrm{PTC}=90°$ 인 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PC}}^2-\overline{\mathrm{CT}}^2=\left\{\sqrt{(3+2)^2+(1-1)^2}\right\}^2-2^2=21$$

$\therefore \overline{\mathrm{PT}}=\sqrt{21}$

17. 두 점 A$(6,\ -4)$, B$(1,\ 1)$ 을 이은 선분 AB를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① $(8,\ -10)$　② $(8,\ -8)$　③ $(8,\ -6)$
④ $(10,\ -8)$　⑤ $(10,\ -6)$

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{2\times1+3\times6}{2+3},\ \frac{2\times1+3\times(-4)}{2+3}\right)=(4,\ -2)$$

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2\times1-3\times6}{2-3},\ \frac{2\times1-3\times(-4)}{2-3}\right)=(16,\ -14)$$

따라서 선분 PQ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+16}{2},\ \frac{-2+(-14)}{2}\right)$$

$\therefore\ (10,\ -8)$

18. 두 원 $x^2+y^2=a^2$, $(x-3)^2+(y+4)^2=4$가 만나지 않을 조건은? (단, $a>0$)

① $0<a<3$　② $3<a<7$

③ $a>7$　④ $0<a<3$ 또는 $a>7$

⑤ $2<a<7$ 또는 $a>7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0,\ 0)$, $(3,\ -4)$이므로

두 원의 중심거리 d는 $d=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$d=5>a+2$

$\therefore\ 0<a<3$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$d=5<|a-2|$

$\therefore a>7\ (\because\ a>0)$

(i), (ii) 에서 $0<a<3$ 또는 $a>7$

19. 두 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-6x-8y=0$의 위치관계 중 옳은 것은?

① 서로 외부에 있다

② 외접한다

③ 두 점에서 만난다

④ 내접한다

⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$을 정리하면
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
$x^2+y^2-6x-8y=0$을 정리하면
$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$
$\sqrt{3-1^2+(4-1)^2}<5-1$
따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

20. 다음<보기>는 방정식 $x^2+y^2-2x+y+k=0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

ㄱ $k<\frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
ㄴ $k=-\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 이고, 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
ㄷ $k<4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄹ $k=\frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
ㅁ $k<\frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

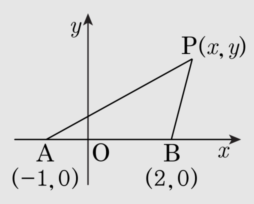
해설

주어진 방정식을 정리하면,
$(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}-k$ 이다.
$y=0$ 을 대입 후 정리하면,$(x-1)^2=1-k$
$\Rightarrow$ $k<1$ 일 때 두 점에서 만난다.
ㄹ $x=0$ 를 대입 후 정리하면,
$(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}-k$
$\therefore$ $k=\frac{1}{4}$ 일 때 접한다.
ㅁ 중심이 $y=x$ 위에 있지 않으므로 x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.
$\therefore$ (ㄱ,ㄹ,ㅁ) 가 참이다.

21. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2+y^2}$

$4\left\{(x-2)^2+y^2\right\} = \left\{(x+1)^2+y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2+y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.

22. 평행한 두 직선 $3x-5y+2=0$, $3x-5y-1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ ② $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ ③ $\frac{\sqrt{34}}{34}$
④ $\frac{2\sqrt{34}}{34}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

해설

$3x-5y+2=0$ 위의 점 $\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$ 에서

$3x-5y-1=0$ 까지의 거리

$$\frac{\left|3\cdot 0-5\cdot\frac{2}{5}-1\right|}{\sqrt{9+25}}=\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$$

23. 두 원 $(x+a)^2+(y+b)^2=1,\ x^2+(y+2b)^2=9$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은?

① $a^2+b^2<4$

② $4<a^2+b^2<16$

③ $a^2+b^2<16$

④ $1<4a^2+9b^2<10$

⑤ $a^2+b^2<25$

해설

두 원의 중심이 각각 $(-a,-b),(0,-2b)$이므로
중심거리 d는
$d=\sqrt{(-a-0)^2+(-b+2b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$
따라서 두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 조건은
$3-1<\sqrt{a^2+b^2}<3+1$
$\therefore\ 4<a^2+b^2<16$

24. 원 $x^2+y^2=5$가 직선 $y=2x+k$와 만나지 않도록 하는 k 값의 범위를 구하여라.

해설

(1) 단계

$x^2+y^2=5\cdots$㉠

$y=2x+k\cdots$㉡

㉡를 ㉠에 대입하여 정리하면

$5x^2+4kx+k^2-5=0\cdots$㉢

(2) 단계

원과 직선이 만나지 않으려면 ㉢에서

$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)<0$

(3) 단계

$k^2-25>0$

(4) 단계

따라서 $k>5,\ \ k<-5$

25. 두 점 $A(1,\ -3)$, $B(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점 $P(a,\ b)$와 $3:2$로 외분하는 점 $Q(c,\ d)$에 대하여 a, b, c, d의 값은?

① $\frac{11}{5}$, 3, 7, 27 ② $-\frac{16}{5}$, $\frac{11}{5}$, 5, 3
③ 5, $\frac{11}{3}$, $\frac{13}{5}$, 27 ④ $\frac{9}{5}$, -3, -23, -1
⑤ $\frac{9}{5}$, -1, -3, -23

해설

$$P\ (a,\ b) = \left(\frac{3\times3+2\times1}{3+2}, \frac{3\times7+2\times(-3)}{3+2}\right)$$
$$= \left(\frac{11}{5},\ 3\right)$$
$$Q\ (c,\ d) = \left(\frac{3\times3-2\times1}{3-2}, \frac{3\times7-2\times(-3)}{3-2}\right)$$
$$= (7,\ 27)$$

26. 어떤 점을 x 축에 대하여 대칭이동, y 축에 대하여 대칭이동을 한 후 다시 원점에 대하여 대칭이동을 하였더니 $(-3\ ,2\ )$가 되었다. 어떤 점의 좌표를 구하여라.

해설

(1) 구하는 점의 좌표를 (a, b) 라 하면

(2) x 축에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -b)$, 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b)$ 이다. 이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (a, b) 이고

(3) 이 점의 좌표가 $(-3\ ,2\ )$ 이므로
구하는 점의 좌표는 $(-3\ ,2\ )$ 이다.

27. 직선 $y = 2x + k$와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k의 값은?

① -1　② -4　③ 4　④ 10　⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$가 원의 중심 $(2, 0)$을 지날 때이므로
$k = -4$

28. 두 원 $C_1 : x^2+y^2=9$, $C_2 : x^2+y^2-6ax-8ay+25a^2-4=0$ 과 외접하도록 상수 a 의 값 또는 그 범위를 정하여라. (단, $a>0$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$C_1 : x^2+y^2=9$
$C_2 : (x-3a)^2+(y-4a)^2=4$ 이므로
두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 3, 2 이고,
중심거리는 $\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=5a$
이때, $3+2=5a$
$\therefore a=1$

29. 두 점 A$(-3,\ 1)$, B$(2,\ 5)$ 사이의 거리는?

① 5 ② $4\sqrt{2}$ ③ 6 ④ $\sqrt{41}$ ⑤ $\sqrt{43}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + (5-1)^2} = \sqrt{41}$

30. 개념 (발전) 39쪽 2번

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

31. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 a, b에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$
④ $1+\sqrt{2}$　⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 $a,\ b$
$a+b=-m,\ ab=6$
$|a-b|=1$
$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$
$=m^2-24=1$
$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$
$x^2-5x+6=0$
$(x-3)(x-2)=0$
$a=3,\ b=2$
$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

32. 부등식 $|x^2-4x-6| \le 6$ 의 해를 구하면?

① $-2 \le x < 6$

② $0 \le x \le 4$

③ $x \le -2$또는$x \ge 6$

④ $-2 \le x \le 0$또는$4 \le x \le 6$

⑤ $x \le 0$또는$x \ge 4$

해설

$|x^2-4x-6| \le 6$ 에서

$$\underbrace{-6 \ \langle \ x^2-4x-6}_{\text{㉠}} \le 6$$

㉠에서 $x^2-4x \ge 0, x(x-4) \ge 0$

$\therefore x \le 0$또는$x \ge 4$

㉡에서 $x^2-4x-12 \le 0, (x+2)(x-6) \le 0$

$\therefore -2 \le x \le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-2 \le x \le 0$ 또는 $4 \le x \le 6$

33. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} y-x=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

해설

(1) 단계

$$\begin{cases} y-x=1 & \cdots① \\ x^2+y^2=25 & \cdots② \end{cases}$$

①에서 $y=x+1$을 ②에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=25$

즉, $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=-4,\ 3$

(2) 단계

①에 대입하면

$$\begin{cases} x=-4\text{일 때, } y=-4+1=-3 \\ x=3\text{일 때, } y=3+1=4 \end{cases}$$

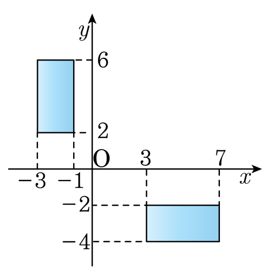
$\therefore\ x=-4, y=-3$ 또는 $x=3, y=4$

34. $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+3$에 대하여 y의 최솟값을 구하여라.

해설

(1) 단계
$x^2-2x+3=t$로 치환한다.
(2) 단계
$t=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$이므로 $t\geq 2$
(3) 단계
$y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$(단, $t\geq 2$)
따라서, $t=2$일 때, y는 최솟값 3을 갖는다.

35. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?



① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{3}{4}$
④ $-\frac{7}{8}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.
따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 A$(-2,\ 4)$, B$(5,\ -3)$이므로
직선 AB의 기울기는 $\frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$

36. 다음은 인수분해를 이용하여 이차방정식을 푼 것이다. ㉮에 알맞은 것은?

$$11x^2 - 13x + 2 = 0$$
$$(11x - 2)(\quad ㉮ \quad) = 0$$
$$x = \frac{2}{11} \text{ 또는 } x = 1$$

① $x - 2$ ② $x - 1$ ③ $x + 1$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 3$

해설

x에 대한 이차방정식
$11x^2 - 13x + 2 = 0$
$(11x - 2)(x - 1) = 0$
$\therefore\ x = \frac{2}{11}$ 또는 $x = 1$
따라서 ㉮는 $x - 1$

37. 함수 $y=-\frac{1}{x}+1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y=\frac{1}{1-x}$ ② $y=\frac{1}{1+x}$ ③ $y=\frac{x}{1-x}$
④ $y=\frac{1+x}{x}$ ⑤ $y=\frac{x}{1+x}$

해설

$y=-\frac{1}{x}+1$ 에서 $\frac{1}{x}=1-y$

$1=(1-y)x$, $x=\frac{1}{1-y}$

$\therefore\ y=\frac{1}{1-x}$

38. 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2,\ 3)$ 을 지날 때, 상수 $a,\ b$ 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(x)=\dfrac{ax+b}{x-1}$ 라 하면 $f(2)=3,\ f^{-1}(2)=3$

$f(2)=2a+b=3\cdots$㉠

$f^{-1}(2)=3$ 에서 $f(3)=2$ 이므로

$f(3)=\dfrac{3a+b}{2}=2\quad\therefore 3a+b=4\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1\quad\therefore ab=1$

39. 함수$y = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점$(3, -2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$

$\Rightarrow -2 = 3a + b \cdots$ ①

또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3, -2)$ 을 지나므로

$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$

$\Rightarrow 3 = \dfrac{-2a+b}{-4}$

$\Rightarrow -2a + b = -12 \cdots$ ②

①, ② 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a + b = -6$

40. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$(f^{-1})^{-1}=f$ 이므로 $f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{-x+2}$ 의 역함수를 구하면

$f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}=\dfrac{ax+b}{x+c}$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=4$

$\therefore\ \ 2+3+4=9$

41. 10종류의 아이스크림 중에서 3가지를 고르는 방법의 수는?

① 120 ② 320 ③ 540 ④ 620 ⑤ 720

해설

${}_{10}C_3 = 120$

42. $\{1\} \subset A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8개

해설

집합 A 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합이면서 1을 포함하는 집합이므로 $\{2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$2^3 = 8$ (개)