

1. 좌표평면 위에 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, b)$ 가 있다. $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 를 만족하는 점 P 의 자취가 x 축에 접할 때 b 의 값을 구하여라.

해설

(1) 단계

$P(x, y)$ 라 하면

(2) 단계

$$\overline{AP} = 2\overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$\text{즉, } (x-2)^2 + y^2 = 4\{x^2 + (y-b)^2\}$$

(3) 단계

점 P 의 자취가 x 축에 접하므로 $y=0$ 일 때

$$(x-2)^2 = 4(x^2 + b^2)$$

즉, $3x^2 + 4x + 4b^2 - 4 = 0$ 의 판별식 D 가 0이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 4 - 3(4b^2 - 4) = 0$$

(4) 단계

$$4 - 3b^2 = 0$$

$$\therefore b = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $A(0, 5)$ 와 $B(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \leq a \leq 8$)

① $\sqrt{3}$

② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{6}$

④ $\sqrt{7}$

⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$$

이 원이 두 점 $A(0, 5)$, $B(8, 1)$ 을 지나므로

$$a^2 - 10b + 25 = 0, a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$$

두 식을 연립하면

$$4a^2 - 80a + 300 = 0, 4(a - 5)(a - 15) = 0$$

그런데

$$0 \leq a \leq 8 \text{ 이므로 } a = 5, b = 5 \text{ 이다.}$$

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1 - 5}{8 - 0}(x - 0)$$

$$\therefore x + 2y - 10 = 0$$

따라서 원의 중심 $(5, 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

3. 두 점 (1, 4), (3, 2) 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$$

(1, 4), (3, 2) 를 지나므로 각각 대입하면,

$$(1 - a)^2 + (4 - b)^2 = b^2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(3 - a)^2 + (2 - b)^2 = b^2 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,

$$a = 1, b = 2 \text{ 또는 } a = 9, b = 10$$

$$\therefore \text{두 원의 반지름의 합은 } 10 + 2 = 12$$

4. 좌표평면 위의 두 정점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 선분 $\overline{PB}$ 의 길이가 선분 $\overline{PA}$ 의 길이의 2 배가 되는 점 P(x, y)의 자취의 방정식은?

① $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$

② $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20$

③ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$

④ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$

⑤ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20$

해설

P(x, y)라 하면, $\overline{PB} = 2\overline{PA}$ 이므로

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-5)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = 4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\}$$

이것을 전개하여 정리하면,

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

해설

$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 1$ 이므로

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점과

2 : 1로 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원이다. (Apollonius)

5. 세 꼭짓점 $A(0,0)$, $B(-5,5)$, $C(2,7)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는?

① $(-1, 7)$

② $(-1, 4)$

③ $(-2, 1)$

④ $(2, -2)$

⑤ $(-4, -8)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{0 + (-5) + 2}{3}, \frac{0 + 5 + 7}{3} \right) = (-1, 4)$$

6. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$ 의 한 근은 -1 과 1 사이에 있고, 또 한 근은 -1 보다 작도록 하는 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m > \frac{2}{9}$

② $m > \frac{1}{7}$

③ $m > -\frac{1}{3}$

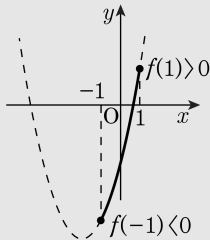
④ $m < -\frac{1}{3}$

⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$ 으로 놓을 때,

$f(x) = 0$ 의 근이 한 근은 -1 과 1 사이에 있고, 또 한 근은 -1 보다 작아야 하므로



$$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$$

$$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$\therefore m > \frac{1}{7}$$

7. 점 (1, 4) 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지나므로 처음 직선은 점 (-2, -5) 를 지난다.

따라서 처음 직선은 두 점 (1, 4), (-2, -5) 를

지나므로 구하는 기울기는 $\frac{4 - (-5)}{1 - (-2)} = 3$

8. 세 점 $A(2, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(3, -2)$ 와 점 D 를 꼭지점으로 하는 평행사변형 $ABCD$ 에서 점 D 의 좌표를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(6, 0)$

해설

D 의 좌표를 (x, y) 라 하면 평행사변형 성질에 의해 선분 AC 와 선분 BD 의 중점은 같으므로

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$$

따라서 $(x, y) = (6, 0)$

9. 직선 $y = 2x - 1$ 에 대하여 점 $(3, 0)$ 의 대칭인 점의 좌표를 (a, b) 라 하면 $b - a$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

구하려는 점을 (a, b) 라 하면, $(3, 0)$ 과 (a, b) 의 중점은 $y = 2x - 1$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $y = 2x - 1$ 은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+0}{2}\right)$ 을

$y = 2x - 1$ 에 대입하면 $2a - b = -4 \cdots ①$

$y = 2x - 1$ 의 기울기가 2이므로 두 점을 지나는 기울기는

$$\frac{b-0}{a-3} = -\frac{1}{2}, a + 2b = 3 \cdots ②$$

따라서 ①, ②를 연립하면 $a = -1, b = 2$

10. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π

② $2\sqrt{3}\pi$

③ 4π

④ $2\sqrt{5}\pi$

⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을
지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, 0 \right) = (3, 0)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(\frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2 - 1}, 0 \right) = (7, 0)$$

$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$$\Rightarrow \text{둘레의 길이는 } 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

11. $A(2,2)$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 무게중심이 원점일 때, 이 정삼각형의 한변의 길이를 구하면?

① $3\sqrt{3}$

② $2\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{5}$

④ $3\sqrt{2}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

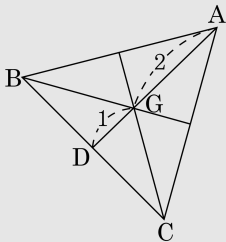
무게중심은 그림처럼 중선을 $2:1$ 로 내분한다.

$$\therefore \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

그리고 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{6}$$



12. 점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B(a, b)라 하면,

$\overline{AB}$ 의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$ 가

직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 위에 있으므로

$$4 \cdot \frac{1+a}{2} - 2 \cdot \frac{2+b}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore 2a - b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AB와 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 이

$$\text{수직이므로 } \frac{b-2}{a-1} \times 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 1$

$$\therefore B(3, 1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

13. 원 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 를 원점에 대하여 대칭 이동한 도형의 방정식은?

① $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

② $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$

④ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

⑤ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ 를 대입한다.

14. x 축 및 y 축에 접하고 원 $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 4$ 에 외접하는 원은 두 개 있다. 이 두 원의 반지름의 합은?

① 10

② 21

③ 24

④ 27

⑤ 30

해설

조건을 만족하는 원은 제1사분면에서 두 개 존재한다. 원의 반지름을 a 라 하면, 중심의 좌표는 (a, a) 이다. 주어진 원과 외접하기 위해서는 두 원의 중심 간의 거리가 반지름의 합과 같으면 된다.

$$\sqrt{(7-a)^2 + (6-a)^2} = a + 2$$

양변 제곱하여 정리하면,

$$2a^2 - 26a + 85 = a^2 + 4a + 4$$

$$a^2 - 30a + 81 = 0$$

따라서, 두 개의 원의 반지름은 3, 27 이고
그 합은 근과 계수와의 관계에서 30

15. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$$3x - y - 6 = 0, \quad 3x - y + k = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선 $3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

16. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 밖의 한 점 $P(3,1)$ 에서 이 원에 그은 접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{5}$

② $\sqrt{7}$

③ $\sqrt{11}$

④ $\sqrt{17}$

⑤ $\sqrt{21}$

해설

원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 을 표준
형으로 고치면

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

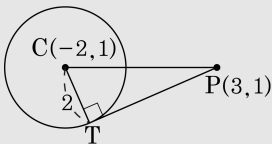
아래 그림과 같이 원 밖의 한 점

$P(3,1)$ 에서 이 원에 접선을 그어 그 접점을 T ,

원의 중심을 $C(-2,1)$ 이라고 하면 $\triangle PTC$ 는 $\angle PTC = 90^\circ$ 인
직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{PT}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CT}^2 \quad \therefore \overline{PT} = \sqrt{21}$$

$$= \left\{ \sqrt{(3+2)^2 + (1-1)^2} \right\}^2 - 2^2 = 21$$



17. 두 점 A(6, -4), B(1, 1) 을 이은 선분 AB를 2 : 3 으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 중점의 좌표는?

① (8, -10)

② (8, -8)

③ (8, -6)

④ (10, -8)

⑤ (10, -6)

해설

$$P\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 6}{2 + 3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2 + 3}\right) = (4, -2)$$

$$Q\left(\frac{2 \times 1 - 3 \times 6}{2 - 3}, \frac{2 \times 1 - 3 \times (-4)}{2 - 3}\right) = (16, -14)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4 + 16}{2}, \frac{-2 + (-14)}{2}\right)$$

$$\therefore (10, -8)$$

18. 두 원 $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$ 가 만나지 않을 조건은?
(단, $a > 0$)

① $0 < a < 3$

② $3 < a < 7$

③ $a > 7$

④ $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $2 < a < 7$ 또는 $a > 7$

해설

두 원의 중심이 각각 $(0, 0)$, $(3, -4)$ 이므로

두 원의 중심거리 d 는 $d = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

(i) 두 원이 서로 외부에 위치할 때

$$d = 5 > a + 2$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

(ii) 한 원이 다른 원의 내부에 위치할 때

$$d = 5 < |a - 2|$$

$$\therefore a > 7 (\because a > 0)$$

(i), (ii) 에서 $0 < a < 3$ 또는 $a > 7$

19. 두 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 의 위치관계 중 옳은 것은?

- ① 서로 외부에 있다
- ② 외접한다
- ③ 두 점에서 만난다
- ④ 내접한다
- ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 을 정리하면

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 을 정리하면

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$\sqrt{3 - 1^2 + (4 - 1)^2} < 5 - 1$$

따라서 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

20. 다음 <보기>는 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + y + k = 0$ 에 대한 설명이다.
옳은 것을 모두 고르면 몇 개인가?

- ㉠ $k < \frac{5}{4}$ 이면 방정식은 원을 나타낸다.
 ㉡ $k = -\frac{5}{4}$ 일 때, 방정식은 중심이 $(1, -\frac{1}{2})$ 이고,
 반지름이 $\frac{5}{2}$ 이다.
 ㉢ $k < 4$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 x 축과 서로
 다른 두 점에서 만난다.
 ㉤ $k = \frac{1}{4}$ 일 때, 방정식이 나타내는 도형은 y 축과 접한다.
 ㉥ $k < \frac{5}{4}$ 인 임의의 실수 k 에 대하여 방정 식이 나타내는
 도형은 x 축과 y 축에 동 시에 접할 수 없다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

주어진 방정식을 정리하면,

$$(x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} - k \text{ 이다.}$$

$y = 0$ 을 대입 후 정리하면, $(x-1)^2 = 1 - k$

$\Rightarrow k < 1$ 일 때 두 점에서 만난다.

㉤ $x = 0$ 를 대입 후 정리하면,

$$(y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - k$$

$\therefore k = \frac{1}{4}$ 일 때 접한다.

㉥ 중심이 $y = x$ 위에 있지 않으므로

x 축, y 축 동시에 접하지 않는다.

$\therefore$ (㉠, ㉤, ㉥) 가 참이다.

21. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

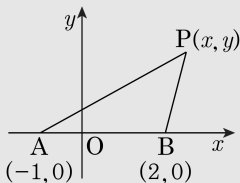
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



22. 평행한 두 직선 $3x - 5y + 2 = 0$, $3x - 5y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

① $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

② $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

③ $\frac{\sqrt{34}}{34}$

④ $\frac{2\sqrt{34}}{34}$

⑤ $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

해설

$3x - 5y + 2 = 0$ 위의 점 $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ 에서

$3x - 5y - 1 = 0$ 까지의 거리

$$\frac{\left| 3 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{2}{5} - 1 \right|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

23. 두 원 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = 1$, $x^2 + (y+2b)^2 = 9$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은?

① $a^2 + b^2 < 4$

② $4 < a^2 + b^2 < 16$

③ $a^2 + b^2 < 16$

④ $1 < 4a^2 + 9b^2 < 10$

⑤ $a^2 + b^2 < 25$

해설

두 원의 중심이 각각 $(-a, -b)$, $(0, -2b)$ 이므로
중심거리 d 는

$$d = \sqrt{(-a-0)^2 + (-b+2b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

따라서 두 원이 서로 다른 두 점에서 만날 조건은

$$3 - 1 < \sqrt{a^2 + b^2} < 3 + 1$$

$$\therefore 4 < a^2 + b^2 < 16$$

24. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 가 직선 $y = 2x + k$ 와 만나지 않도록 하는 k 값의 범위를 구하여라.

해설

(1) 단계

$$x^2 + y^2 = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = 2x + k \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

(2) 단계

원과 직선이 만나지 않으려면 ㉢에서

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) < 0$$

(3) 단계

$$k^2 - 25 > 0$$

(4) 단계

따라서 $k > 5$, $k < -5$

25. 두 점 A(1, -3), B(3, 7)에 대하여 $\overline{AB}$ 를 3 : 2로 내분하는 점 P(a, b)와 3 : 2로 외분하는 점 Q(c, d)에 대하여 a, b, c, d의 값은?

① $\frac{11}{5}, 3, 7, 27$

② $-\frac{16}{5}, \frac{11}{5}, 5, 3$

③ $5, \frac{11}{3}, \frac{13}{5}, 27$

④ $\frac{9}{5}, -3, -23, -1$

⑤ $\frac{9}{5}, -1, -3, -23$

해설

$$\begin{aligned} P(a, b) &= \left(\frac{3 \times 3 + 2 \times 1}{3 + 2}, \frac{3 \times 7 + 2 \times (-3)}{3 + 2} \right) \\ &= \left(\frac{11}{5}, 3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(c, d) &= \left(\frac{3 \times 3 - 2 \times 1}{3 - 2}, \frac{3 \times 7 - 2 \times (-3)}{3 - 2} \right) \\ &= (7, 27) \end{aligned}$$

26. 어떤 점을 x 축에 대하여 대칭이동, y 축에 대하여 대칭이동을 한 후 다시 원점에 대하여 대칭이동을 하였더니 $(-3, 2)$ 가 되었다. 어떤 점의 좌표를 구하여라.

해설

- (1) 구하는 점의 좌표를 (a, b) 라 하면
- (2) x 축에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(a, -b)$, 다시 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b)$ 이다. 이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (a, b) 이고
- (3) 이 점의 좌표가 $(-3, 2)$ 이므로
구하는 점의 좌표는 $(-3, 2)$ 이다.

27. 직선 $y = 2x + k$ 와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$ 이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k 의 값은?

① -1

② -4

③ 4

④ 10

⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ 이므로

중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 두 교점 사이의 거리의

최댓값은 직선 $y = 2x + k$ 가 원의 중심 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로

$k = -4$

28. 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : x^2 + y^2 - 6ax - 8ay + 25a^2 - 4 = 0$ 과 외접하도록 상수 a 의 값 또는 그 범위를 정하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$C_1 : x^2 + y^2 = 9$$

$$C_2 : (x - 3a)^2 + (y - 4a)^2 = 4 \text{ 이므로}$$

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이는 각각 3, 2 이고,

$$\text{중심거리는 } \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = 5a$$

$$\text{이때, } 3 + 2 = 5a$$

$$\therefore a = 1$$

29. 두 점 $A(-3, 1)$, $B(2, 5)$ 사이의 거리는?

① 5

② $4\sqrt{2}$

③ 6

④ $\sqrt{41}$

⑤ $\sqrt{43}$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{41}$$

30. 개념 (발전) 39쪽 2번

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

31. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + mx + 6 = 0$ 의 두 근 a, b 에 대하여 $|a - b| = 1$ 이 성립할 때, $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1}$ 의 값은? (단, $m < 0$)

① $-1 - \sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $2 - \sqrt{3}$

④ $1 + \sqrt{2}$

⑤ $-2 + \sqrt{5}$

해설

$$x^2 + mx + 6 = 0 \text{의 두 근이 } a, b$$

$$a + b = -m, ab = 6$$

$$|a - b| = 1$$

$$|a - b|^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= m^2 - 24 = 1$$

$$m^2 = 25 \therefore m = -5 (\because m < 0)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$a = 3, b = 2$$

$$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

32. 부등식 $|x^2 - 4x - 6| \leq 6$ 의 해를 구하면?

① $-2 \leq x < 6$

② $0 \leq x \leq 4$

③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 6$

④ $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $4 \leq x \leq 6$

⑤ $x \leq 0$ 또는 $x \geq 4$

해설

$$|x^2 - 4x - 6| \leq 6 \text{에서}$$

$$\frac{-6 < x^2 - 4x - 6 \leq 6}{\textcircled{\tiny ㉠} \qquad \qquad \textcircled{\tiny ㉡}}$$

$$\textcircled{\tiny ㉠}\text{에서 } x^2 - 4x \geq 0, x(x - 4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 4$$

$$\textcircled{\tiny ㉡}\text{에서 } x^2 - 4x - 12 \leq 0, (x + 2)(x - 6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 6$$

따라서 공통 범위를 구하면

$$-2 \leq x \leq 0 \text{ 또는 } 4 \leq x \leq 6$$

33. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

해설

(1) 단계

$$\begin{cases} y - x = 1 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y = x + 1$ 을 ②에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

$$\text{즉, } x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -4, 3$$

(2) 단계

①에 대입하면

$$\begin{cases} x = -4 \text{ 일 때, } y = -4 + 1 = -3 \\ x = 3 \text{ 일 때, } y = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

$$\therefore x = -4, y = -3 \text{ 또는 } x = 3, y = 4$$

34. $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 3$ 에 대하여 y 의 최솟값을 구하여라.

해설

(1) 단계

$x^2 - 2x + 3 = t$ 로 치환한다.

(2) 단계

$t = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$ 이므로 $t \geq 2$

(3) 단계

$y = t^2 - 2t + 3 = (t - 1)^2 + 2$ (단, $t \geq 2$)

따라서, $t = 2$ 일 때, y 는 최솟값 3을 갖는다.

35. 다음 그림의 좌표평면 위에서 두 직사각형의 넓이를 모두 이등분하는 직선의 기울기는?

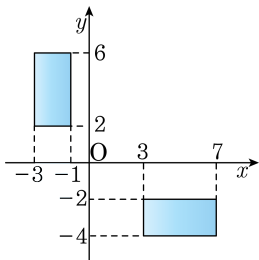
① $-\frac{3}{2}$

② -1

③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{7}{8}$

⑤ $-\frac{1}{2}$



해설

직사각형의 넓이는 두 대각선의 교점을 지나는 직선에 의하여 이등분된다.

따라서, 두 대각선의 교점의 좌표는 각각 $A(-2, 4)$, $B(5, -3)$ 이므로

$$\text{직선 AB의 기울기는 } \frac{-3-4}{5-(-2)} = -1$$

36. 다음은 인수분해를 이용하여 이차방정식을 푼 것이다. ㉞에 알맞은 것은?

$$11x^2 - 13x + 2 = 0$$

$$(11x - 2)(\text{㉞}) = 0$$

$$x = \frac{2}{11} \text{ 또는 } x = 1$$

① $x - 2$

② $x - 1$

③ $x + 1$

④ $x + 2$

⑤ $x + 3$

해설

x 에 대한 이차방정식

$$11x^2 - 13x + 2 = 0$$

$$(11x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{11} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 ㉞는 $x - 1$

37. 함수 $y = -\frac{1}{x} + 1$ 의 역함수를 바르게 구한 것은?

① $y = \frac{1}{1-x}$
④ $y = \frac{1+x}{x}$

② $y = \frac{1}{1+x}$
⑤ $y = \frac{x}{1+x}$

③ $y = \frac{x}{1-x}$

해설

$$y = -\frac{1}{x} + 1 \text{ 에서 } \frac{1}{x} = 1 - y$$

$$1 = (1 - y)x, x = \frac{1}{1 - y}$$

$$\therefore y = \frac{1}{1 - x}$$

38. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \quad \therefore 3a+b=4 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \quad \therefore ab = 1$$

39. 함수 $y = \frac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$

$$\Rightarrow -2 = 3a + b \cdots \textcircled{1}$$

또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3, -2)$ 을 지나므로

$$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-2a+b}{-4}$$

$$\Rightarrow -2a + b = -12 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2, b = -8$

$$\therefore a + b = -6$$

40. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

41. 10 종류의 아이스크림 중에서 3가지를 고르는 방법의 수는?

① 120

② 320

③ 540

④ 620

⑤ 720

해설

$${}_{10}C_3 = 120$$

42. $\{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 는 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합이면서 1을 포함하는 집합이므로 $\{2, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$$2^3 = 8 \text{ (개)}$$