1. 다음 중 방정식 $x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$의 근이 아닌 것은?

① -1 ② 1 ③ 2
④ $1+2i$ ⑤ $1-2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면
$x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$
$(x+1)(x^3-4x^2+9x-10)=0$
$(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$
$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i)=0$
$\therefore\ x=-1,\ 2,\ 1+2i,\ 1-2i$
따라서 근이 아닌 것은 1이다.

2. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$

$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$

$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$

따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$

$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > \frac{3}{2}$
④ $a < \frac{3}{2}$ ⑤ $a > -2$

해설

$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{a+1}\cdots\cdots\cdots$㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\frac{3}{2}$

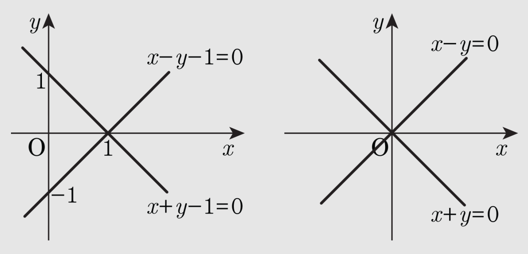
5. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개

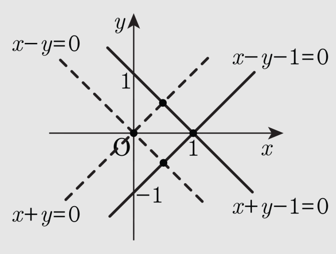
④ 2 개 ⑤ 4 개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

6. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

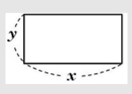
7. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17,\ 2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

8. 방정식 $2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x와 y의 곱은?

① -2　② 3　③ 4　④ 8　⑤ 10

해설

$2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2-8x+16)=0$,

$(x-2y)^2+(x-4)^2=0$

$x=2y, x=4$

$\therefore\ x=4, y=2 \quad \therefore\ xy=8$

9. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

10. 사차방정식 $x^4-x^3-4x^2-x+1=0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x+\frac{1}{x}=a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4-x^3-4x^2-x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2-x-4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$
$x+\frac{1}{x}=a$로 치환하면
$a^2-a-6=0$, $(a-3)(a+2)=0$
$\therefore$ $a=3$ 또는 $a=-2$
따라서, 모든 A의 값의 합은 $3+(-2)=1$

11. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$ ② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$
③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$ ④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$
⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\ & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\ \hline & 1 & 2a+4 & -4a-1 & \boxed{0} \end{array}$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\left\{x^2+2(a+2)x-4a-1\right\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

12. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\beta+\gamma=-2-\alpha$, $\gamma+\alpha=-2-\beta$, $\alpha+\beta=-2-\gamma$를 이용하면

(주어진 식)$= \frac{-2-\alpha}{\alpha} + \frac{-2-\beta}{\beta} + \frac{-2-\gamma}{\gamma}$

$= -2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) - 3$

$= -2\left(\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}\right) - 3 = -\frac{3}{2}$

13. $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$　② $x^7 + y^7 = 1$　③ $x^9 + y^9 = 1$
④ $x^{11} + y^{11} = 1$　⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

14. $\begin{cases} |x|+x+y=10 \\ x+|y|-y=12 \end{cases}$ 일 때, $x+y$의 값은?

① -2　② 2　③ $\frac{18}{5}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 22

해설

$|x|+x+y=10$ ······㉠
$x+|y|-y=12$ ······㉡
$x \le 0$이면, $y=10$, $x=12$
이것은 $x \le 0$을 만족하지 않는다.
$x>0$이면 $2x+y=10$······㉢
$y \ge 0$이면 $x=12$, $y=-14$
이것은 $y \ge 0$을 만족하지 않는다.
$y<0$이면, $x-2y=12$······㉣
㉢, ㉣에서 $x=\frac{32}{5}$, $y=-\frac{14}{5}$
$\therefore\ x+y=\frac{18}{5}$

15. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는 $a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.

16. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \cdots$ ㉡
$(x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times 3 = -x + z = -10$,
$x = z + 10,\ z \geq 1$이므로
$x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

17. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 $40\,\mathrm{cm}$, 겉넓이는 $62\,\mathrm{cm}^2$, 부피가 $30\,\mathrm{cm}^3$ 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?

① 3 cm ② 3.5 cm ③ 4 cm
④ 4.5 cm ⑤ 5 cm

해설

각 모서리의 길이를 x, y, z라고 하면
문제의 뜻에서
(ⅰ) $4(x+y+z)=40$
$\therefore\ x+y+z=10$
(ⅱ) $2(xy+yz+zx)=62$
$\therefore xy+yz+zx=31$
(ⅲ) $xyz=30$
따라서, x, y, z는 삼차방정식
$t^3-10t^2+31t-30=0$의 세 근이다.
$(t-2)(t-3)(t-5)=0$
$\therefore t=2,\ 3,\ 5$
이 중 가장 긴 모서리의 길이는 $5(\mathrm{cm})$이다.

18. 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

② $\alpha^4=1$

③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1=1$

④ α는 실수가 아니다.

⑤ α^3은 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이다.

해설

① α가 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이므로,
$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$
② α^4-1
$=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$이므로
$\alpha^4=1$
③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1$
$=(\alpha^4)^{25}+(\alpha^4)^{12}\cdot\alpha^2+(\alpha^4)^6\cdot\alpha+(\alpha^4)^3\cdot\alpha^3+1$
$=1+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+1=1$
④ $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)=0$에서
$x=-1$이라는 실근이 존재하므로
α는 실수일 수 있다.
⑤ $x=\alpha^3$을 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$에 대입하면,
$\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1$
$=(\alpha^4)^2\cdot\alpha+\alpha^4\cdot\alpha^2+\alpha^3+1$
$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+1=0$
$(\because\ \alpha^4=1)$

19. 사차방정식 $x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 45x + a + 20 = 0$과 이차방정식 $x^2 - 8x + 8 = 0$이 공통근을 가질 때, a의 값은?

① $6\sqrt{2}$　　② $\pm 6\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{6}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$　　⑤ $\pm 5\sqrt{3}$

해설

두 방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^4 - 10\alpha^3 + 28\alpha^2 - 45\alpha + a + 20 = 0 \cdots$ ①

$\alpha^2 - 8\alpha + 8 = 0 \cdots$ ②

①의 좌변을 ②의 좌변으로 나누어 정리하면,

$(\alpha^2 - 8\alpha + 8)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) + 3\alpha + a - 12 = 0$

$\therefore\ 3\alpha + a - 12 = 0 \cdots$ ③

②에서 $\alpha = 4 \pm 2\sqrt{2}$

이것을 ③에 대입하여 a를 구하면

$a = \pm 6\sqrt{2}$

20. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4k + 4 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1　　② 7　　③ 6　　④ -6　　⑤ 1

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $(\alpha \geq \beta)$

$\alpha + \beta = -2(k-1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta = 4k + 4$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면 $\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = 8$, $(\alpha+2)(\beta+2) = 12$,　$\alpha\beta = -10, 0, 2, 42, 32, 30$

그런데 $\alpha,\ \beta$가 정수이므로 ㉡에서

$k = \dfrac{\alpha\beta - 4}{4}$

따라서 k의 정수값은 $-1,\ 7$

$\therefore\ k$의 값들의 합은 6