

1. 다음 중 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -1

② 1

③ 2

④ $1 + 2i$

⑤ $1 - 2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$$

$$(x + 1)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = 0$$

$$\therefore x = -1, 2, 1 + 2i, 1 - 2i$$

따라서 근이 아닌 것은 1 이다.

2. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 20x - 16 = 0$ 의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

①

25

② 20

③ 10

④ 7

⑤ 4

해설

$$x^4 + 5x^3 - 20x - 16$$

$$= (x + 1)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16)$$

$$= (x + 1)(x + 4)(x^2 - 4)$$

$$= (x + 1)(x + 4)(x + 2)(x - 2)$$

따라서 네근은 $-1, -2, -4, 2$

$$\therefore \text{네근의 제곱의 합은 } 1 + 4 + 16 + 4 = 25$$

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 9$$

$$(i) \ t = 4 \text{ 일 때, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$(ii) \ t = 9 \text{ 일 때, } x^2 = 9$$

$$\therefore x = \pm 3$$

따라서 모든 해의 합은

$$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기
위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > -1$

② $a < -1$

③ $a > \frac{3}{2}$

④ $a < \frac{3}{2}$

⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots \textcircled{㉠} \\ ax-y=3 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 에서 $(a+1)x=5$

$$\therefore x = \frac{5}{a+1} \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $\frac{5}{a+1} + y = 2$

$$\therefore y = 2 - \frac{5}{a+1}$$

그런데 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$\frac{5}{a+1} > 0, 2 - \frac{5}{a+1} > 0 \text{에서,}$$

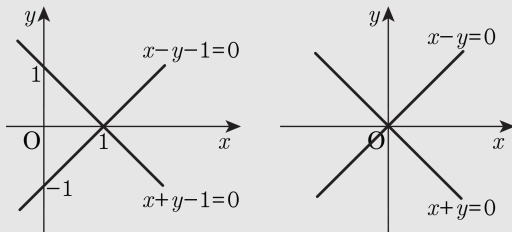
$$a > \frac{3}{2}$$

5. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1) = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?

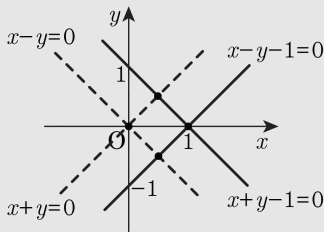
- ① 무한히 많다. ② 0개 ③ 1개
 ④ 2개 ⑤ 4개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

6. 어떤 공장에서 A , B 의 두 제품을 생산하고 있다. A 제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B 제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B 제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a , b 라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$ 이다.

$$a + b = 70, 1.2a + 1.25b = 86$$

연립하여 풀면, $a = 30$, $b = 40$

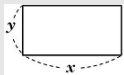
7. 가로,의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로,의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x cm, y cm 라 하면



$$x = y + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$$2(x + y) = 34 \text{ 즉, } x + y = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$y + 5 + y = 17, 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$$y = 6 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } x = 11$$

$$\therefore xy = 11 \times 6 = 66$$

8. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

① -2

② 3

③ 4

④ 8

⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$$

$$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$$

$$x = 2y, x = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8$$

9. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

10. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$ 라 하자. 이 때, a 가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변을
 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$ 로 치환하면

$$x^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = -2$$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

11. 삼차방정식 $x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + (4a+1) = 0$ 이 중근을 가질 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$ ② $a = -2, -2 \pm \sqrt{10}$
 ③ $a = 3, -3 \pm \sqrt{5}$ ④ $a = 1, 4 \pm \sqrt{10}$
 ⑤ $a = -1, -2 \pm 2\sqrt{2}$

해설

$f(x) = x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + 4a+1$ 이라 하면
 $f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $(x-1)$ 을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\
 & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\
 \hline
 & 1 & 2a+4 & -4a-1 & 0
 \end{array}$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$(x-1) \{x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1\} = 0$$

(i) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x \neq 1$ 인 경우

$$D = 0 \text{이므로, } a^2 + 8a + 5 = 0$$

$$\therefore a = -4 \pm \sqrt{11}$$

(ii) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x = 1$ 을 근으로 갖는 경우

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + 2(a+2) - 4a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$

12. 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,
 $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{3}{4}$

③ -1

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -2

해설

삼차 방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -4$$

$\beta + \gamma = -2 - \alpha, \gamma + \alpha = -2 - \beta, \alpha + \beta = -2 - \gamma$ 를 이용하면

$$(\text{주어진 식}) = \frac{-2 - \alpha}{\alpha} + \frac{-2 - \beta}{\beta} + \frac{-2 - \gamma}{\gamma}$$

$$= -2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) - 3$$

$$= -2 \left(\frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) - 3 = -\frac{3}{2}$$

13. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$

② $x^7 + y^7 = 1$

③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$

⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 는 } x^2 - x + 1 = 0 \text{ 의 근이다}$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = y^3 = -1, \quad x + y = 1, \quad xy = 1$$

$$\textcircled{1} : x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$$

$$\textcircled{2} : x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$$

$$\textcircled{3} : x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$$

$$\textcircled{4} : x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$$

$$\textcircled{5} : x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$$

14.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

① -2

② 2

③ $\frac{18}{5}$

④ $\frac{22}{3}$

⑤ 22

해설

$$|x| + x + y = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + |y| - y = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x \leq 0 \text{ 이면, } y = 10, x = 12$$

이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.

$$x > 0 \text{ 이면 } 2x + y = 10 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$y \geq 0 \text{ 이면 } x = 12, y = -14$$

이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.

$$y < 0 \text{ 이면, } x - 2y = 12 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{ 에서 } x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$$

$$\therefore x + y = \frac{18}{5}$$

15. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

- ① 0 개
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.
- ⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}, (a+b)^2 = ab, a^2 + ab + b^2 = 0$$

$$\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0 \text{ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는}$$

$a = 0, b = 0$ 뿐이다.

따라서 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 는 없다.

16. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x 개,

1.5점짜리 문항을 y 개,

2점짜리 문항을 z 개라고 하면

$$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + y + z = 30 \cdots \textcircled{㉡}$$

($x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$)라고 하면

$$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡} \times 3 = -x + z = -10,$$

$$x = z + 10, z \geq 1 \text{ 이므로}$$

$$x = z + 10 \geq 11$$

이 때 $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로

x 의 최솟값은 11

17. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 40 cm, 겉넓이는 62 cm^2 , 부피가 30 cm^3 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?

① 3 cm

② 3.5 cm

③ 4 cm

④ 4.5 cm

⑤ 5 cm

해설

각 모서리의 길이를 x, y, z 라고 하면
문제의 뜻에서

$$(i) 4(x + y + z) = 40$$

$$\therefore x + y + z = 10$$

$$(ii) 2(xy + yz + zx) = 62$$

$$\therefore xy + yz + zx = 31$$

$$(iii) xyz = 30$$

따라서, x, y, z 는 삼차방정식

$$t^3 - 10t^2 + 31t - 30 = 0 \text{ 의 세 근이다.}$$

$$(t - 2)(t - 3)(t - 5) = 0$$

$$\therefore t = 2, 3, 5$$

이 중 가장 긴 모서리의 길이는 5 (cm) 이다.

18. 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha^4 = 1$

③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1 = 1$

④ α 는 실수가 아니다.

⑤ α^3 은 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이다.

해설

① α 가 방정식

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이므로,

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

② $\alpha^4 - 1$

$$= (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\alpha^4 = 1$$

③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1$

$$= (\alpha^4)^{25} + (\alpha^4)^{12} \cdot \alpha^2 + (\alpha^4)^6 \cdot \alpha + (\alpha^4)^3 \cdot \alpha^3 + 1$$

$$= 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + 1 = 1$$

④ $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1) = 0$ 에서

$x = -1$ 이라는 실근이 존재하므로

α 는 실수일 수 있다.

⑤ $x = \alpha^3$ 을 방정식

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 에 대입하면,

$$\alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1$$

$$= (\alpha^4)^2 \cdot \alpha + \alpha^4 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 + 1$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + 1 = 0$$

$$(\because \alpha^4 = 1)$$

19. 사차방정식 $x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 45x + a + 20 = 0$ 과 이차방정식 $x^2 - 8x + 8 = 0$ 이 공통근을 가질 때, a 의 값은?

① $6\sqrt{2}$

② $\pm 6\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{6}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$

⑤ $\pm 5\sqrt{3}$

해설

두 방정식의 공통근을 α 라 하면

$$\alpha^4 - 10\alpha^3 + 28\alpha^2 - 45\alpha + a + 20 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 - 8\alpha + 8 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①의 좌변을 ②의 좌변으로 나누어 정리하면,

$$(\alpha^2 - 8\alpha + 8)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) + 3\alpha + a - 12 = 0$$

$$\therefore 3\alpha + a - 12 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \alpha = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

이것을 ③에 대입하여 a 를 구하면

$$a = \pm 6\sqrt{2}$$

20. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4k + 4 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1

② 7

③ 6

④ -6

⑤ 1

해설

두 근을 α, β 라 하면 ($\alpha \geq \beta$)

$$\alpha + \beta = -2(k-1) \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha\beta = 4k + 4 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \times 2 + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = 8$, $(\alpha+2)(\beta+2) = 12$, $\alpha\beta = -10, 0, 2, 42, 32, 30$

그런데 α, β 가 정수이므로 $\textcircled{㉡}$ 에서

$$k = \frac{\alpha\beta - 4}{4}$$

따라서 k 의 정수값은 -1, 7

$\therefore k$ 의 값들의 합은 6