1. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

2. 점 (5, 3) 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x,\ 12x - 5y - 19 = 0$

② $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

③ $y = 1,\ 12x - 5y + 5 = 0$

④ $y = 1,\ 4x - 5y - 8 = 0$

⑤ $y = -1,\ 12x + 5y - 12 = 0$

해설

점 (2, 1) 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라
하면 $y - 1 = m(x - 2)$ $\cdots$ ㉠
점 (5, 3) 과 직선 ㉠사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|m(5-2) - 3 + 1|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$$

$(3m-2)^2 = 4(m^2+1)$

$5m^2 - 12m = 0$

$\therefore\ m = 0,\ \frac{12}{5}$

㉠에 대입하면 $y = 1,\ 12x - 5y - 19 = 0$

3. 두 직선 $2x-y-1=0$, $x+2y-1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y=x$　　② $y=\frac{1}{2}x$　　③ $y=\frac{1}{3}x$

④ $y=\frac{1}{4}x$　　⑤ $y=\frac{1}{5}x$

해설

$P(x,\ y)$ 라 하면,

(i) $2x-y-1=0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1=\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{4+1}}$$

(ii) $x+2y-1=0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2=\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1+4}}$$

$d_1=d_2$ 이므로 $|2x-y-1|=|x+2y-1|$

$\therefore\ 2x-y-1=\pm(x+2y-1)$

즉, $x-3y=0$, $3x+y-2=0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x-3y=0$

$\therefore\ y=\frac{1}{3}x$

4. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x-4y-5=0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x+4y=0$　　② $x-2y+5=0$　　③ $3x-4y=0$

④ $x+2y+5=0$　　⑤ $x-2y-5=0$

해설

$3x-4y-5=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$3a-4b-5=0 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 $(X,\ Y)$라 하면

$X=\dfrac{1+a}{2}$, $Y=\dfrac{2+b}{2}$

$\therefore a=2X-1,\ b=2Y-2$

이것을 ㉠에 대입하면

$3(2X-1)-4(2Y-2)-5=0$

$\therefore 6X-8Y=0$

$\therefore 3x-4y=0$

5. 두 점 $A(-3,\ -2), B(9,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10$　② $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 20$

③ $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 40$　④ $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 60$

⑤ $(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$

해설

조건을 만족하는 점 $P(x, y)$ 라고 하면

$\overline{AP} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$2\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$

양변을 제곱하면

$4\left\{(x+3)^2 + (y+2)^2\right\} = (x-9)^2 + (y-4)^2$

전개하여 정리하면

$x^2 + y^2 + 14x + 8y - 15 = 0$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$

6. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

7. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle\mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

8. $\triangle$ABC 의 변 BC, CA, AB 의 중점이 각각 P$(-1,\ a)$, Q$(3,\ 3)$, R$(1,\ 6)$ 이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1　② $2\sqrt{5}$　③ 3　④ 4　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심은 $\triangle$PQR 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$\left(\dfrac{-1+3+1}{3},\ \dfrac{a+3+6}{3}\right) = \left(b,\ \dfrac{10}{3}\right)$

$b = 1,\ \dfrac{a+9}{3} = \dfrac{10}{3}$

$a = 1,\ \ b = 1\ \therefore\ ab = 1$

9. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x+2y-1+k(2x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$\frac{|2k+1+2(2-k)-1|}{\sqrt{(2k+1)^2+(2-k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2+5}}$

$\therefore$ 최솟값은 $k=0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

10. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P 에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$ 을 지날 때, 점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

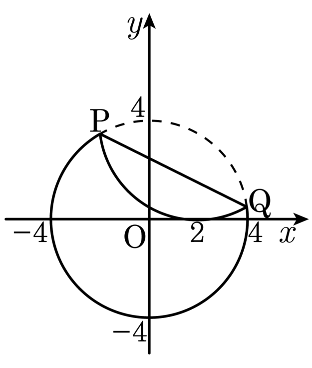
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은
$x_1x + y_1y = 5 \cdots$ ①
이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로
$3x_1 + y_1 = 5 \cdots$ ②
또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$
위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots$ ③
② 에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③ 에 대입하면
$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0$,
$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$
$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$
$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$
$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

11. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

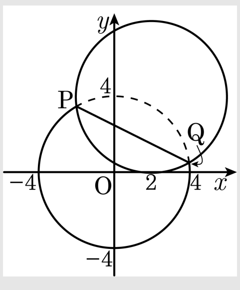


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$//



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

12. 두 점 $\mathrm{A}(-5,\ -2)$, $\mathrm{B}(2,\ 5)$ 에 대하여 원 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle\mathrm{ABP}$ 의 무게중심 G 가 나타내는 도형의 자취의 길이는?

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

해설

$\mathrm{A}(-5,\ -2)\ \mathrm{B}(2,\ 5)\ \mathrm{P}(x,\ y)$

$\mathrm{G}\left(\dfrac{x-3}{3},\ \dfrac{y+3}{3}\right)$

$X=\dfrac{x-3}{3},\ Y=\dfrac{y+3}{3}$

$x=3X+3,\ y=3Y-3$

$(x,\ y)$ 가 $x^2+y^2=9$ 위를 움직이므로,

$(3X+3)^2+(3Y-3)^2=9$

$(X+1)^2+(Y-1)^2=1$

따라서 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ 는 반지름이 1 인 원

$\rightarrow\ 2\pi\cdot 1=2\pi$