

1. 직선 $(a+2)x - y - a + b = 0$ 이 x 축의 양의 방향과 45° 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

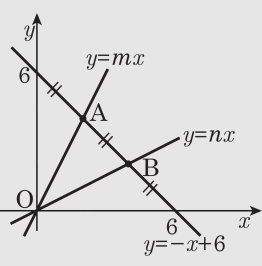
$y = (a+2)x - a + b$ 에서
기울기 $= a+2 = \tan 45^\circ = 1$
 $\therefore a = -1$
 y 절편 $-a + b = 4$
 $\therefore b = 3$
 $\therefore a + b = 2$

2. 직선 $x + y - 6 = 0$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 두 직선 $y = mx$, $y = nx$ 에 의하여 삼등분 될 때, $m + n$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 직선 $y = -x + 6$ 과
두 직선 $y = mx$, $y = nx$ 의 교점을
각각 A, B 라 하면 두 점 (6, 0), (0, 6)
을 잇는 선분을 2 : 1로 내분하는 점이
A 이고, 1 : 2로 내분하는 점이 B 이다.



이 때, 두 점 A, B 의 좌표는

$$A \left(\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 6}{2 + 1}, \frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 0}{2 + 1} \right),$$

$$B \left(\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 6}{1 + 2}, \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 0}{1 + 2} \right)$$

$\therefore A(2, 4), B(4, 2)$

따라서, 직선 $y = mx$ 는 점 (2, 4) 를 지나고,

직선 $y = nx$ 는 점 (4, 2) 를 지나므로

$m = 2, n = \frac{1}{2}$

$\therefore m + n = \frac{5}{2}$

3. x, y 에 대한 연립방정식 $2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 해를 갖지 않을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 평행해야 한다.

따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \text{에서}$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

1) $a = 2$ 일 때,

$$\frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} \neq -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{평행}$$

2) $a = -1$ 일 때,

$$\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{일치}$$

따라서, 1), 2)에 의하여 $a = 2$

4. 점 (5, 3) 으로 부터의 거리가 2 이고, 점 (2, 1) 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = x, 12x - 5y - 19 = 0$

② $y = 1, 12x - 5y - 19 = 0$

③ $y = 1, 12x - 5y + 5 = 0$

④ $y = 1, 4x - 5y - 8 = 0$

⑤ $y = -1, 12x + 5y - 12 = 0$

해설

점 (2, 1) 을 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 $y - 1 = m(x - 2) \cdots \textcircled{1}$

점 (5, 3) 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 2 이므로

$$\frac{|m(5-2) - 3 + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$(3m - 2)^2 = 4(m^2 + 1)$$

$$5m^2 - 12m = 0$$

$$\therefore m = 0, \frac{12}{5}$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면 } y = 1, 12x - 5y - 19 = 0$$

5. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$

즉, $x - 3y = 0$, $3x + y - 2 = 0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$\therefore y = \frac{1}{3}x$

6. 정점 A(1, 2)와 직선 $3x - 4y - 5 = 0$ 위의 점을 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

- ① $3x + 4y = 0$ ② $x - 2y + 5 = 0$ ③ $3x - 4y = 0$
④ $x + 2y + 5 = 0$ ⑤ $x - 2y - 5 = 0$

해설

$3x - 4y - 5 = 0$ 위의 임의의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$$3a - 4b - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AP}$ 의 중점을 (X, Y) 라 하면

$$X = \frac{1+a}{2}, Y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2X - 1, b = 2Y - 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3(2X - 1) - 4(2Y - 2) - 5 = 0$$

$$\therefore 6X - 8Y = 0$$

$$\therefore 3x - 4y = 0$$

7. 두 점 A(-3, -2), B(9, 4) 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10$ ② $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 20$

③ $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 40$ ④ $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 60$

⑤ $(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$

해설

조건을 만족하는 점 P (x,y) 라고 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$$

이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$2\sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-4)^2}$$

양변을 제곱하면

$$4\{(x+3)^2 + (y+2)^2\} = (x-9)^2 + (y-4)^2$$

전개하여 정리하면

$$x^2 + y^2 + 14x + 8y - 15 = 0$$

따라서, 구하는 자취의 방정식은

$$(x+7)^2 + (y+4)^2 = 80$$

8. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

OP의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 OP $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

9. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6)에 대하여 삼각형 OAB의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

10. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2 |x| \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2 + y^2 = 2 |x + y| \cdots \textcircled{L}$$

㉠)과 ㉡)에서 $2 \mid x \Rightarrow 2 \mid x+y$

$$\therefore x + y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{c}$$

㉠과 ㉡의 교점의 개수는 다음 그림

에서 5개이다.

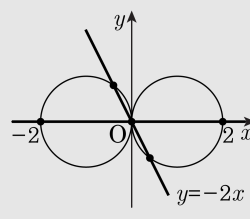
실제로, 교점을 구하면

$(0, 0), (\pm 2, 0),$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5}\right)$$

(복부호동순)

(복부호동순)



11. $\triangle ABC$ 의 변 BC, CA, AB의 중점이 각각 P(-1, a), Q(3, 3), R(1, 6)이고, 이 삼각형의 무게중심의 좌표가 $\left(b, \frac{10}{3}\right)$ 일 때, ab 의 값은?

① 1 ② $2\sqrt{5}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심은 $\triangle PQR$ 의 무게중심과 일치하게 되므로,

$$\left(\frac{-1+3+1}{3}, \frac{a+3+6}{3}\right) = \left(b, \frac{10}{3}\right)$$

$$b=1, \frac{a+9}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a=1, \quad b=1 \quad \therefore ab=1$$

12. 점 $(1, 2)$ 와 직선 $x + 2y - 1 + k(2x - y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은?

- ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

점과 직선사이 거리 구하는 공식을 이용한다.

$$\frac{|2k + 1 + 2(2 - k) - 1|}{\sqrt{(2k + 1)^2 + (2 - k)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5k^2 + 5}}$$

$\therefore$ 최솟값은 $k = 0$ 일 때, 분모는 $\sqrt{5}$, 즉 $\frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

13. 두 원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 가 서로 외접할 때, 점 (a, b) 가 그리는 도형에 대한 설명 중 옳은 것은?
- ① 이 도형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이는 12이다.
② 이 도형에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $6\sqrt{3}$ 이다.
③ 두 종류의 두형이 나타난다.
④ 이 도형의 길이는 10π 이다.
⑤ 원점을 지나는 원이다.

해설

두 원이 서로 외접할 조건은 두 원의 중심을 연결한 선분의 길이가 두 원의 반지름들의 합과 같으면 된다.

원 $(x-a)^2 + y^2 = 4$ 에서 중심은 $(a, 0)$, 반지름은 2이고, 원 $x^2 + (y-b)^2 = 9$ 에서 중심은 $(0, b)$, 반지름은 3이다.

$x^2 + (y - b)^2 = 9$ 에서 중심은 $(0, b)$, 반지름은 3이다.
 따라서 $(-3, 0)$ 과 $(3, 0)$ 사이의 거리 $\geq 2 \times 3 = 6$ 이므로, $\sqrt{2} \geq 3$ 이다.

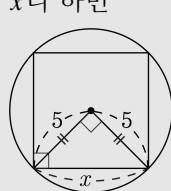
따라서, $(a, 0)$ 과 $(0, b)$ 사이의 거리가 5가 되므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

$$\therefore a^2 + b^2 = 25$$

그러므로 구하려는 자취는 $x^2 + y^2 = 25$

① 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를

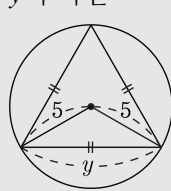
① 내접하는



$$2x^2 = 10 \therefore x = 5\sqrt{2}$$

② 내적하는 전사간형의 하 변의 길이

② 내접하는 원이라 하면



$$y = \frac{5}{2} \sqrt{3} \times 2 = 5 \sqrt{3}$$

$$\therefore y = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

14. 두 원 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 1$ 이 직교하도록 하는 a 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 2)$, $(1, -a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2 + (2+a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1 이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-1)^2 + (2+a)^2 = 3^2 + 1^2$
 $\therefore 2a^2 + 2a - 5 = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

15. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

- ㉠ $c = b$ 이면 두 점에서 만난다.
- ㉡ $c = 2b$ 이면 만나지 않는다.
- ㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이면 한 점에서 만난다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0, 0)$ 이므로 원의 중심에서 직선 $ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

㉠ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

16. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

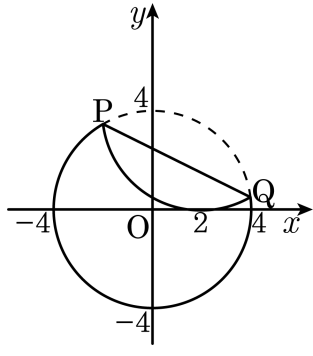
$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

17. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

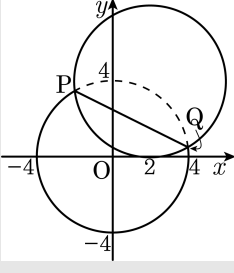


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$
 $\therefore x + 2y - 5 = 0$
따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.

18. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \leq a \leq 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$$

이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로

$$a^2 - 10b + 25 = 0, a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$$

두 식을 연립하면

$$4a^2 - 80a + 300 = 0, 4(a-5)(a-15) = 0$$

그런데

$0 \leq a \leq 8$ 이므로 $a = 5, b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$$\therefore x + 2y - 10 = 0$$

따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

19. 두 점 A(-5, -2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 가 나타내는 도형의 자취의 길이는?

- ① π
- ② 2π
- ③ 3π
- ④ 4π
- ⑤ 5π

해설

A(-5, -2) B(2, 5) P(x, y)

$G\left(\frac{x-3}{3}, \frac{y+3}{3}\right)$

$X = \frac{x-3}{3}, Y = \frac{y+3}{3}$

$x = 3X + 3, y = 3Y - 3$

(x, y) 가 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이므로,

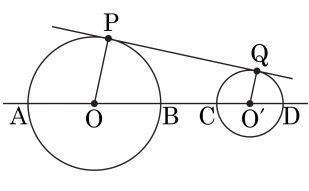
$(3X + 3)^2 + (3Y - 3)^2 = 9$

$(X + 1)^2 + (Y - 1)^2 = 1$

따라서 G(X, Y) 는 반지름이 1 인 원

$\rightarrow 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

20. 다음 그림과 같이 두 개의 원과 두 원의 중점 O, O' 을 지나는 직선과의 교점을 A, B, C, D 라 하고, 1 개의 공통외접선이 두 원에 접하는 점을 P, Q 라 하자. $\overline{OO'} = p, \overline{PQ} = q$ 라 할 때, $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 를 두 근으로 하는 이차방정식은?



- ① $x^2 + 2px + q^2 = 0$
 ② $x^2 - 2px + q^2 = 0$
- ③ $x^2 - px + q = 0$
 ④ $x^2 - p^2x + q^2 = 0$
- ⑤ $x^2 - px + q^2 = 0$

해설

다음 그림에서 $\overline{OP} = r, \overline{O'Q} = r'$ 라 하고

점 O' 에서 $\overline{PQ}$ 와 평행한 직선과 $\overline{OP}$ 와의 교점을 R 이라 하자.

$\overline{OR} = r - r', \overline{AC} = p + r - r',$

$\overline{BD} = p - r + r'$

$\therefore \overline{AC} + \overline{BD} = 2p$

$\therefore \overline{AC} \cdot \overline{BD} = p^2 - (r - r')^2 = \overline{OR}^2 = q^2$

따라서 $x^2 - 2px + q^2 = 0$

