

1. $\sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} = a + bi$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 15

② 25

③ 35

④ 45

⑤ 55

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-12} + \sqrt{-3}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}} \\ &= 2\sqrt{3}i - 3\sqrt{2} + \sqrt{3}i \\ &= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i \\ &= a + bi \\ &\text{따라서, } a = -3\sqrt{2}, b = 3\sqrt{3} \\ &\therefore a^2 + b^2 = 18 + 27 = 45 \end{aligned}$$

2. 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$ 가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y) 로 표현되는 도형과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

- ① 2
- ② 1
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{1}{4}$
- ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

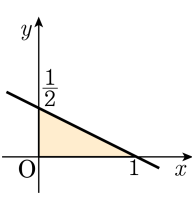
$(\text{준식}) = (2x - 2y) + (x + 2y - 1)i = 0$

$\therefore x + 2y - 1 = 0,$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore \text{넓이} = \frac{1}{4}$



3. 복소수 $(1+i)x^2 + 2(2+i)x + 3 - 3i$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다.
이 때, 실수 x 의 값은?
(단, $i^2 = -1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 2x - 3)i$ 가 순허수이어야 하므로
 $x^2 + 4x + 3 = 0$, $x^2 + 2x - 3 \neq 0$
 $(x+3)(x+1) = 0$, $x = -1$, $x = -3$
 $(x+3)(x-1) \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -3$
 $\therefore x = -1$

4. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \text{ (단, } x>0 \text{)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}(2-2xy)-(4x+y)i&=6-2i \\ 2-2xy&=6, \ 4x+y=2 \\ \text{연립하여 } x \text{에 대해 정리하면} \\ 2x^2-x-1&=0 \\ (x-1)(2x+1)&=0 \\ \therefore x&=1(x>0), \ y=-2\end{aligned}$$

5. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \frac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ -9 ④ 9 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} z &= -2 + i, \bar{z} = -2 - i \\ z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\ &= -4 - 5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

6. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^7 + x^4 + 2$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}x^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{3}i + 3i^2}{4} \\&= \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3 &= x \cdot x^2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\&= \frac{-1 + 3i^2}{4} = -1\end{aligned}$$

$$\therefore x^7 + x^4 + 2 = (x^3)^2 \cdot x + x^3 \cdot x + 2 = x - x + 2 = 2$$

7. 실수 a, b 에 대하여 $(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = 0$, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a-b$ 의 값은?

① $-\sqrt{13}$

② $-\sqrt{37}$

③ $\sqrt{19}$

④ $\sqrt{13}$

⑤ $\sqrt{37}$

해설

$$(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = (a+b-5)^2 + |ab+3| = 0 \rightarrow$$

$$a+b=5, ab=-3, (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 37$$

$$a-b = \pm\sqrt{37} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \text{ 가 성립하려면, } a < 0 \text{ 그리고 } b \geq 0 \text{ 일 때이다.}$$

$$\therefore a-b < 0 \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } a-b = -\sqrt{37}$$

8. 두 실수 x, y 가 $x + y = -5$, $xy = 2$ 를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x + y = -5$, $xy = 2$ 에서 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

9. 동수와 용제는 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}$ 의 값을 아래와 같이 서로 다르게 계산하였다. 틀린 계산 과정에서 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳을 고른 것은?

동수: $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{\textcircled{1}} \sqrt{4i}\sqrt{9i} \xrightarrow{\textcircled{2}} \sqrt{36i^2} \xrightarrow{\textcircled{3}} -6$

용제: $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{\textcircled{4}} \sqrt{(-4)(-9)} \xrightarrow{\textcircled{5}} \sqrt{36} \xrightarrow{\textcircled{6}} 6$

- ①

㉠
- ②

㉡
- ③

㉢
- ④

㉣
- ⑤

㉤

해설

$a > 0$ 일 때, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 이다.
또, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다.

따라서 용제가 계산한 식 ㉣ 부분에서 처음으로 잘못되었다.

10. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3 + 3x^2i - 3x - i)$$

$$= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

11. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?
- ① 원 ② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

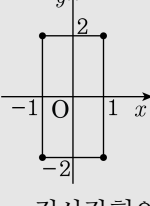
$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b) + (2b-3a)i \\ \therefore 2b-3a &= 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow \text{기울기가 양인 직선}\end{aligned}$$

12. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$
복소수의 상등에 의하여
 $|x|+|y|=3, 3|x|-4|y|=-5$
두 식을 연립하면
 $|x|=1, |y|=2$
 $(x, y) \rightarrow (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $= 2 \times 4 = 8$

13. $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha' = b + ai$ 라 한다.

$\alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha')^4$ 을 간단히 하면?

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $2 + i$

④ $2 - i$

⑤ $\sqrt{3} + i$

해설

$\alpha = a + bi$, $\alpha' = b + ai$ 이므로

$$\alpha\alpha' = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

그런데 $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a + bi$ 에서

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha\alpha' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)i = i$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2\alpha(\alpha \cdot \alpha')^4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3} + i$$

14. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

- ① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y\end{aligned}$$

15. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때,
 $\sqrt{(y-x+1)^2+3} \sqrt{x^3-y^3-3xy(x-y)}+|x|$ 를 간단히 하면?
- ① $x-1$ ② $-x+1$ ③ $2y-3x+1$
④ $3x-2y-1$ ⑤ $-3x-2y-1$

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$

(준식) $= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$
 $= y-x+1+x-y-x = -x+1$

16. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = ni^n$ 을 만족할 때, $f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101) = x + yi$ 이다. 이 때, 실수 x, y 에 대하여 $y - x$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & f(1) + f(2) + \dots + f(100) + f(101) \\ &= i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 100i^{100} + 101i^{101} \\ &= i - 2 - 3i + 4 + 5i + \dots + 100 + 101i \\ &= (-2 + 4 - 6 + 8 + \dots - 98 + 100) \\ &\quad + (1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 97 - 99 + 101)i \\ &= 2 \times 25 + (-2) \times 25 + 101i \\ &= 50 + 51i \\ &\therefore x = 50, y = 51, y - x = 51 - 50 = 1 \end{aligned}$$

17. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots \textcircled{1}$, $y^2 - x = i \cdots \textcircled{2}$ 에서

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 : $(x + y)(x - y) + (x - y) = 0$,

$$(x - y)(x + y + 1) = 0$$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x + y)^2 - 2xy - (x + y) = 2i$

$\therefore xy = 1 - i$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$= (-1)^3 - 3(1 - i)(-1)$$

$$= 2 - 3i$$

18. 복소수 α, β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

- $\textcircled{\tiny ㉠}$ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

$\textcircled{\tiny ㉡}$ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

$\textcircled{\tiny ㉢}$ $\bar{\alpha} = \alpha$ 이면 α 는 실수이다.

$\textcircled{\tiny ㉤}$ $\bar{a} = \beta$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

- $\textcircled{\tiny 1}$ $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}$

$\textcircled{\tiny 2}$ $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉢}, \textcircled{\tiny ㉤}$

$\textcircled{\tiny 3}$ $\textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}, \textcircled{\tiny ㉤}$

$\textcircled{\tiny 4}$ $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}, \textcircled{\tiny ㉤}$

$\textcircled{\tiny 5}$ $\textcircled{\tiny ㉢}, \textcircled{\tiny ㉤}$

해설

$\textcircled{\tiny ㉠}$ 반례: $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때 $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

$\textcircled{\tiny ㉡}$ 반례: $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때 $\alpha + \beta i = 0$

$\textcircled{\tiny ㉢}$ $\bar{\alpha} = \alpha \rightarrow \alpha$ 는 실수 (참)

$\textcircled{\tiny ㉤}$ $\alpha = a + bi, \bar{a} = \beta = a - bi$ (a, b 는 실수)
 $\alpha + \beta = 2a$ (실수), $\alpha\beta = a^2 + b^2$ (실수) (참)

19. $A = \{x + yi | x^2 + y^2 = 2, x, y \text{는 실수}\}$ 이다.

$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i$ (단, $a : \text{실수}$) 일 때, $\frac{1}{z} \in A$ 가 되는 복소수 z 는 2개가 있다. 이들의 곱을 구하면?

- ① $2i$ ② $-2i$ ③ $\frac{1}{2}i$ ④ $-\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2}i$

해설

$$z = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}i = \frac{1+i}{2a}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{2a}{1+i} = a(1-i) = a - ai$$

$$a - ai \in A \text{이므로 } a^2 + a^2 = 2 \quad \therefore a = \pm 1$$

$$\therefore z = \frac{1+i}{2a} \text{에서 } z = \frac{1+i}{2}, -\frac{1+i}{2}$$

$$\therefore \text{이들의 곱은 } -\frac{i}{2}$$

20. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$ 의 값은?

- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을
이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\therefore \alpha + 1 = -\alpha^2, \beta + 1 = -\beta^2$
①의 양변에 각각 $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 곱하면
 $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, (\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$
 $\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
 $(\alpha + 1)^{10} + (\beta + 1)^{10}$
 $= (-\alpha^2)^{10} + (-\beta^2)^{10}$
 $= (\alpha^3)^6 \cdot \alpha^2 + (\beta^3)^6 \cdot \beta^2$
 $= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= -1 \quad (\because \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1)$

해설

$\alpha + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta + 1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

 $\alpha + 1 = A, \beta + 1 = B$ 라 하면
 $A + B = 1, AB = 1$ 이므로 A, B 는
이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 이다.
 $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 0$
 $\therefore x^3 = -1, A^3 = B^3 = -1$
(준식) $= A^{10} + B^{10} = (A^3)^3 \cdot A + (B^3)^3 \cdot B$
 $= -(A + B)$
 $= -1$