1. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$$
$$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$$
$$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$$
$$=a+bi$$
따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

2. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　　② 1　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

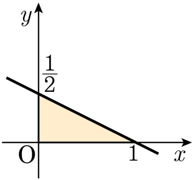
(준식) $=(2x-2y)+(x+2y-1)i=0$

$\therefore\ x+2y-1=0,$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{1}{4}$



3. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

4. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \ (\text{단}, \ x>0)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6, \ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore \ x=1(x>0), \ y=-2$

5. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ -9 ④ 9 ⑤ 0

해설

$z = -2 + i$, $\bar{z} = -2 - i$

$$\begin{aligned} z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\ &= -4 - 5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

6. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^7 + x^4 + 2$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x^3 = x \cdot x^2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{-1+3i^2}{4} = -1$$

$$\therefore\ x^7 + x^4 + 2 = (x^3)^2 \cdot x + x^3 \cdot x + 2 = x - x + 2 = 2$$

7. 실수 a, b 에 대하여 $(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = 0$, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 일 때, $a-b$ 의 값은?

① $-\sqrt{13}$　　② $-\sqrt{37}$　　③ $\sqrt{19}$

④ $\sqrt{13}$　　⑤ $\sqrt{37}$

해설

$(a+b-5)^2 + \sqrt{(ab+3)^2} = (a+b-5)^2 + |ab+3| = 0 \rightarrow$

$a+b=5, ab=-3,\ (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 37$

$a-b = \pm\sqrt{37} \cdots$ ①

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ 가 성립하려면, $a < 0$ 그리고 $b \geqq 0$ 일 때이다.

$\therefore a-b < 0$ 이므로 ①에서 $a-b = -\sqrt{37}$

8. 두 실수 x, y가 $x+y=-5$, $xy=2$를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x+y=-5$, $xy=2$에서 $x<0$, $y<0$이다.

$$\therefore \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$
$$=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}$$
$$=\frac{-5}{-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

9. 동수와 용제는 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}$ 의 값을 아래와 같이 서로 다르게 계산하였다. 틀린 계산 과정에서 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳을 고른 것은?

동수 : $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{㉠} \sqrt{4}i\sqrt{9}i \xrightarrow{㉡} \sqrt{36}i^2 \xrightarrow{㉢} -6$
용제 : $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{㉣} \sqrt{(-4)(-9)} \xrightarrow{㉤} \sqrt{36} \xrightarrow{㉥} 6$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$a > 0$ 일 때, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 이다.
또, $a < 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다.

따라서 용제가 계산한 식 ㉣ 부분에서 처음으로 잘못되었다.

10. $i(x+i)^3$이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$$i(x+i)^3 = i(x^3+3x^2i-3x-i)$$
$$= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

11. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2-3i)z &= (2-3i)(a+bi) \\ &= (2a+3b)+(2b-3a)i\end{aligned}$$

$\therefore\ 2b-3a=0 \quad \therefore\ b=\dfrac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

12. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

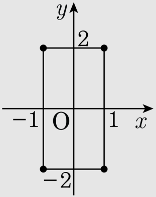
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

13. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$

④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

14. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

15. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$　　② $-x+1$　　③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$　　⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$

16. 자연수 n에 대하여 $f(n) = ni^n$을 만족할 때, $f(1) + f(2) + ... + f(100) + f(101) = x + yi$이다. 이 때, 실수 x, y에 대하여 $y - x$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$
\begin{aligned}
&f(1) + f(2) + \cdots + f(100) + f(101) \\
&= i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 100i^{100} + 101i^{101} \\
&= i - 2 - 3i + 4 + 5i + \cdots + 100 + 101i \\
&= (-2 + 4 - 6 + 8 + \cdots - 98 + 100) \\
&\quad + (1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 97 - 99 + 101)i \\
&= 2 \times 25 + \{(-2) \times 25 + 101\}i \\
&= 50 + 51i \\
&\therefore\ x = 50,\ y = 51,\ y - x = 51 - 50 = 1
\end{aligned}
$$

17. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$①, $y^2 - x = i \cdots$②에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$이므로 $x + y = -1$이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

18. 복소수 α,β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha$ 이면 α 는 실수이다.
㉣ $\overline{a}=\beta$ 이면 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

① ㉠,㉡,㉢　② ㉠,㉢,㉣　③ ㉡,㉢,㉣
④ ㉠,㉡,㉢,㉣　⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2=0$
㉡ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha+\beta i=0$
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha\rightarrow\alpha$ 는 실수(참)
㉣ $\alpha=a+bi,\ \overline{a}=\beta=a-bi$($a,b$는 실수)
$\alpha+\beta=2a$(실수), $\alpha\beta=a^2+b^2$(실수) (참)

19. $A=\{x+yi|x^2+y^2=2,\ x,\ y$는 실수$\}$이다.

$z=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}i$ (단, a : 실수) 일 때, $\dfrac{1}{z}\in A$가 되는 복소수 z는 2개가 있다. 이들의 곱을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ $\dfrac{1}{2}i$ ④ $-\dfrac{1}{2}i$ ⑤ $\dfrac{3}{2}i$

해설

$z=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}i=\dfrac{1+i}{2a}$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{2a}{1+i}=a(1-i)=a-ai$

$a-ai\in A$이므로 $a^2+a^2=2\quad\therefore\ a=\pm1$

$\therefore\ z=\dfrac{1+i}{2a}$에서 $z=\dfrac{1+i}{2},\ -\dfrac{1+i}{2}$

$\therefore$ 이들의 곱은 $-\dfrac{i}{2}$

20. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$ ①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1\ (\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1\ )$

해설

$\alpha+1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) = A^{10}+B^{10} &= \left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B\\ &= -(A+B)\\ &= -1\end{aligned}$$