1. 588 을 588 보다 작은 자연수 a 로 나누었더니 약수의 개수가 홀수인 자연수 b 가 되었다. 가능한 b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 249

해설

약수의 개수가 홀수인 수는 제곱수이므로

$\frac{588}{a} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{a} = k^2 = b$라 하면,

a 는 $3,\ 2^2 \times 3,\ 3 \times 7^2$ 이 가능하다.

$a = 3$ 일 때, $b = 14^2 = 196$

$a = 2^2 \times 3$ 일 때, $b = 7^2 = 49$

$a = 3 \times 7^2$ 일 때, $b = 2^2 = 4$

588보다 작다고 했으므로 $a = 2^2 \times 3 \times 7^2$ 일 때는 제외한다.

$\therefore\ 196 + 49 + 4 = 249$

2. $24\times a = 90\times b = c^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 c 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

$24\times a = 90\times b = c^2$

$24\times a$ 와 $90\times b$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$2^3\times 3\times a = 2\times 3^2\times 5\times b$

즉, c 는 24 과 90 의 공배수이므로 $2^3\times 3^2\times 5$ 의 배수이다.

그러므로 가장 작은 c^2 은 $2^4\times 3^2\times 5^2$ 이어야 한다.

$\therefore c = 2^2\times 3\times 5 = 60$

3. $3^2 \times 5 \times 7$ 에 자연수 a 를 곱하면 어떤 자연수의 제곱인 수가 된다. a 의 최솟값은?

① 5 ② 7 ③ 15 ④ 21 ⑤ 35

해설

$3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱인 수가 되려면 $3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 $5 \times 7 = 35$ 이다.

4. 60 에 어떤 자연수를 곱하여 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 곱할 수 있는 수 중에서 가장 작은 자연수는?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 20

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

곱해야 할 가장 작은 자연수는 $3 \times 5 = 15$

5. $60 \times 2^3 \times x$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 가장 작은 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$60 \times 2^3 \times x = 2^5 \times 3 \times 5 \times x$ 이므로
가장 작은 x 는 $2 \times 3 \times 5 = 30$

6. 18 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때 곱해야 할 자연수를 가장 작은 것부터 3개를 써라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 2

▷ 정답: 8

▷ 정답: 18

해설

$18 = 2 \times 3^2$

곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,

$(2 \times 3^2) \times x = y^2$

$x = 2,\ 2 \times 2^2,\ 2 \times 3^2,\ \cdots$

$= 2,\ 8,\ 18,\ \cdots$

7. 120 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2 \times 3 \times 5$　② $2^3 \times 3 \times 5$　③ $2 \times 3^3 \times 5$
④ $2 \times 3 \times 5 \times 7^2$　⑤ $2^2 \times 3 \times 5$

해설

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 로 소인수분해되므로 소인수 2, 3, 5 의 지수가 홀수인 수를 곱한다.
$2^2 \times 3 \times 5$ 은 2^2 을 곱하였으므로 제곱수가 될 수 없다.

8. 720 을 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로

나눌 수 있는 가장 작은 자연수는 5 이다.

9. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

$540 \times x$ 가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 x 는 $3 \times 5 = 15$

10. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$28 \times a = b^2$ 에서
$28 = 2^2 \times 7$
$a = 7$
$2^2 \times 7 \times 7 = b^2$
$2^2 \times 7^2 = b^2$
$b = 2 \times 7 = 14$

11. $\frac{252}{a}$ 가 어떤 자연수의 제곱이라고 한다. a 가 1 보다 클 때, a 가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 지수가 홀수인 수 7 을 나누어 주면 $252 \div 7 = 36 = 6 \times 6$ 이 되어 6 의 제곱이 된다.

12. 140 에 어떤 자연수를 곱하였더니 자연수 b 의 제곱이 되었다. 곱할 수 있는 자연수 중 가장 작은 자연수를 a 라 할 때, $140 \times a$ 의 값은?

① 3600　② 4900　③ 6400
④ 8100　⑤ 10000

해설

어떤 자연수를 소인수분해했을 때, 모든 소인수의 지수가 짝수이면 그 수는 다른 자연수의 제곱이 된다.
$140 = 2^2 \times 5 \times 7$
5 와 7 의 지수가 홀수이므로 제곱수가 되기 위해 곱해 주어야 하는 수는 $5 \times 7 \times x^2$ (x^2 은 자연수) 꼴이다.
따라서 가장 작은 수 $a = 5 \times 7 = 35$ 이다.
$140 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 = 4900$

13. 72 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이때, 곱할 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$72 \times n = 2^3 \times 3^2 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 2$ 이므로
따라서 n 은
$n = 2 \times 1^2 = 2$
$n = 2 \times 2^2 = 8$
$n = 2 \times 3^2 = 18$
$n = 2 \times 4^2 = 32$
그러므로 가장 작은 두 자리의 자연수 n 은 18 이다.

14. $\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$,

$\frac{72}{n}$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2$, 2×3^2 , 2^3 , $2^3 \times 3^2$ 의 4 개이다.

15. $\frac{360}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되게 하는 자연수 n 은 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$,

$\frac{360}{n}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되기 위해서

$n = 2 \times 5$, $n = 2 \times 3^2 \times 5$, $2^3 \times 5$, $2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 4 개이다.

16. 자연수 $360\times n$ 이 자연수의 제곱이 된다고 할 때, n 이 될 수 있는 것을 모두 구하시오.(단, n 은 160 미만의 자연수이다.)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 40

▷ 정답 : 90

해설

$360\times n = 2^3\times 3^2\times 5\times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 n은 2×5 이다.
따라서 n 이 될 수 있는 160 미만의 수는
$2\times 5 = 10$
$2\times 5\times 2^2 = 40$
$2\times 5\times 3^2 = 90$
$\therefore$ 10, 40, 90

17. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$2^4 \times 3 \times x = y^2$
가장 작은 $x = 3$,
$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$
$y = 2^2 \times 3 = 12$
$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

18. $28 \times x = \frac{588}{y} = z^2$ 을 만족하는 자연수 z 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 모두 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$28 \times x = \frac{588}{y} = z^2$

$28 \times x$ 와 $\frac{588}{y}$ 가 어떤 수의 제곱수가 되어야 하므로 소인수분해를 해 보면

$2^2 \times 7 \times x = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{y}$ 에서

$2^2 \times 7 \times x = z^2$ 을 만족하는 x 는 $7,\ 7 \times 2^2,\ 7 \times 3^2,\ 7 \times 4^2,\ \cdots$ 이고

이에 따른 z^2 의 값은 $2^2 \times 7^2$, $2^4 \times 7^2$, $2^2 \times 3^2 \times 7^2$, $2^6 \times 7^2,\ \cdots$ 이다.

$\frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{y} = z^2$ 을 만족하는 y 는 $3, 2^2 \times 3,\ 3 \times 7^2,\ 2^2 \times 3 \times 7^2$ 이고

이에 따른 z^2 의 값은 $2^2 \times 7^2$, 7^2 , 2^2 , 1 이다.

따라서 두 식을 동시에 만족하는 값은

$x = 7,\ y = 3,\ z = 14$ 이다.

19. 24 에 가능한 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱해야 하는 자연수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 제곱수가 되려면
$2 \times 3,\ 2^3 \times 3,\ 2^3 \times 3^3, \cdots$ 을 곱해야 한다.
따라서 가장 작은 자연수는 6 이다.

20. $\dfrac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?

① 2　② 3　③ 6　④ 8　⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|r} 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\dfrac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값 중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.