

1. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\}$$

$$+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\}$$

$$+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\}$$

$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9$$

$$+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85$$

$$= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46$$

$$= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46$$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

2. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

3. 두 직선 $3x + 2y - 1 = 0$ 과 $2x - 3y + 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

- I. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
II. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
III. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y 좌표는 5의 배수이다.

- ① I ② II ③ III ④ I, III ⑤ II, III

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을 $P(a, b)$ 라고 하면
$$\frac{|3a + 2b - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a - 3b + 1|}{\sqrt{13}}$$
 $3a + 2b - 1 = 2a - 3b + 1$ 또는
 $3a + 2b - 1 = -2a + 3b - 1$ 이므로
 $a + 5b - 2 = 0, 5a - b = 0$ 에서
 $x + 5y - 2 = 0, 5x - y = 0$
즉, $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ 와
 $y = 5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
I. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
II. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3, 1)$ 이 있다.
III. $y = 5x$ 로 x 가 정수일 때,
 y 좌표는 5의 배수이다.

4. 점 A(6, 2)와 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점의 자취는?

- ① $x - 2y - 8 = 0$ ② $x + 2y - 8 = 0$ ③ $x - 2y + 8 = 0$
④ $x + 2y + 8 = 0$ ⑤ $x - 2y = 0$

해설

P (a , b)라 하면 $a + 2b - 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\overline{AP}$ 의 1 : 3 내분점을 Q (x , y)라 하면

$$Q(x, y) = \left(\frac{a+18}{1+3}, \frac{b+6}{1+3} \right)$$

$$x = \frac{a+18}{1+3}, y = \frac{b+6}{1+3}$$

$$a = 4x - 18, b = 4y - 6$$

$\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$4x - 18 + 2(4y - 6) - 2 = 0 \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

5. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$ ② $2x + 3y + 1 = 0$
③ $4x - 3y + 1 = 0$ ④ $x - 4y - 3 = 0$
⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를

P(X, Y)라 하면,

$$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$$

$$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$$

$$4X + 2Y - 3 = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$$

6. 두 점 A (-3, 4), B (2, 6)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점 Q의 좌표는?

- ① $P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$
③ $P\left(-\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ④ $P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{7}{4}\right)$
⑤ $P\left(\frac{5}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 $P(a, 0)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a+3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (-6)^2}$$

Q의 좌표를 $Q(0, b)$ 라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서

$$\sqrt{3^2 + (b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (b-6)^2}$$

두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{4}$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$$

7. 좌표평면 위의 두 점 A(-2, 5), B(6, -3)을 잇는 선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$

② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$
⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$

해설

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \cdot 6 + (1-t) \cdot (-2)}{t + (1-t)}, \frac{t \cdot (-3) + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)} \right) = (8t - 2, 5 - 8t)$$

이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

$$8t - 2 > 0, 5 - 8t > 0$$

$$\therefore \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$$

8. $\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 6)이고 무게중심 G의 좌표가 (3, 4)일 때, 변 BC 의 중점의 좌표는?

① (1, 2)

② (2, 5)

③ (2, 3)

④ (3, 4)

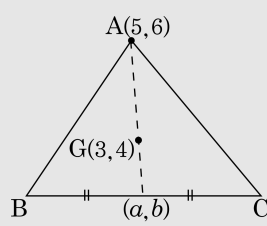
⑤ (4, 5)

해설

무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$$\therefore G \left(\frac{2a+5}{2+1}, \frac{2b+6}{2+1} \right) = (3, 4)$$

$$\therefore a=2, b=3$$



9. 점 A(3, 2)와 직선 $3x - 4y - 11 = 0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x - 4y - 6 = 0$

② $3x + 4y - 6 = 0$

③ $4x - 3y - 6 = 0$

④ $3x - 4y + 6 = 0$

⑤ $3x + 4y + 6 = 0$

해설

직선 $3x - 4y - 11 = 0$ 위의 임의의 점을 $Q(a, b)$ 라고 하면

$$3a - 4b - 11 = 0 \quad \cdots \text{①}$$

$\overline{AQ}$ 의 중점을 $P(x, y)$ 라고 하면

$$x = \frac{3+a}{2}, y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, b = 2y - 2 \quad \cdots \text{②}$$

②를 ①에 대입하면

$$3(2x - 3) - 4(2y - 2) - 11 = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 6 = 0$$

10. 두 점 A(3, 2), B(a , b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a + b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고}$$

이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

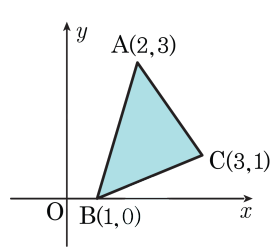
$$\therefore a + 2b - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 이다.

$$\therefore 3a + b = 5$$

11. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

- ① $-1 \leq m \leq 3$ ② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$
 ③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ ④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$
 ⑤ $1 \leq m \leq 3$



해설

직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x + 1) + y - 2 = 0$ 이므로

점 $P(-1, 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가

$\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$

의 범위는

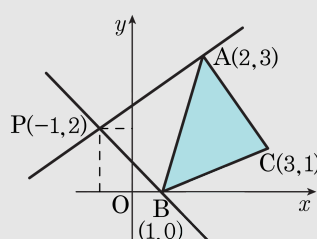
(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$



12. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

13. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A(2, 4), B(0, 2)로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 (a, a) 으로 놓으면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$
양변 제곱하여 정리하면
 $2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4, 8a = 16$
 $\therefore a = 2$
따라서 점 P의 좌표는 (2, 2)이므로 다음 그림에서
(□ABOP의 넓이)
= (△OBP의 넓이) + (△ABP의 넓이)
= $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

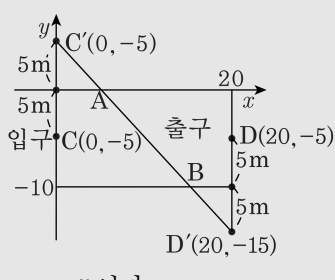
14. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m 떨어져 있어야 하는지 구하여라. (단, 이 전시장은 가로 20m, 세로 10m인 직사각형 모양이다.)
-

▶ 답: m

▶ 정답 : 5m

해설

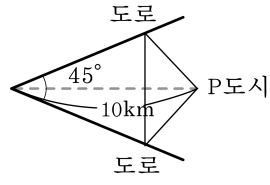
전시장의 입구를 점 $C(0, -5)$, 출구를 점 $D(20, -5)$ 라 하자. 점 $C(0, -5)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $C'(0, 5)$ 점 $D(20, -5)$ 를 직선 $y = -10$ 에 대해 대칭이동한 점은 $D'(20, -15)$ 이다.



이 때, 직선 $C'D'$ 의 방정식은 $y = -x + 5$ 이다.

점 A의 좌표는 직선 C'D'이 x 축과 만나는 점이므로 (5, 0)이다.
따라서, 왼쪽에서 5m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.

15. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



- ① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
 ④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면 $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \quad \therefore \overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$

