1. 세 점 $A(-1,-4)$, $B(3,-3)$, $C(7,1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x,y)$ 라고 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$

$=\left\{(x+1)^2+(y+4)^2\right\}$

$+\left\{(x-3)^2+(y+3)^2\right\}$

$+\left\{(x-7)^2+(y-1)^2\right\}$

$=x^2+2x+1+y^2+8y+16+x^2-6x+9$

$+y^2+6y+9+x^2-14x+49+y^2-2y+1$

$=3x^2-18x+3y^2+12y+85$

$=3(x^2-6x+9)+3(y^2+4y+4)+46$

$=3(x-3)^2+3(y+2)^2+46$

따라서 $x=3$, $y=-2$ 일 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

2. 두 직선 $3x+4y=24$와 $3x+4y=4$사이의 거리를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$의 점 $(0,6)$

$$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$$

3. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고 하면

$$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}}=\frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$$

$3a+2b-1=2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1=-2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

4. 점 $A(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}$를 $1:3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

$P\ (a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠

$\overline{AP}$의 $1:3$ 내분점을 $Q\ (x,\ y)$라 하면

$$Q(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3}\ ,\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

5. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$ ② $2x+3y+1=0$

③ $4x-3y+1=0$ ④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,

$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\dfrac{x-2}{2},\ \dfrac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X=\dfrac{x-2}{2}$, $Y=\dfrac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

6. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② P$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ P$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ P$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면
$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$
Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면
$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서
$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$
두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$
$\therefore$ P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$을 잇는 선분 AB를 $t : (1-t)$로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$　② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$　③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$　⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

해설

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \cdot 6 + (1-t) \cdot (-2)}{t + (1-t)},\ \frac{t \cdot (-3) + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)}\right) = (8t-2, 5-8t)$$

이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

$8t - 2 > 0,\ 5 - 8t > 0$

$\therefore\ \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$

8. $\triangle$ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5, 6)$ 이고 무게중심 G 의 좌표가 $(3, 4)$ 일 때, 변 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 5)$ ③ $(2,\ 3)$

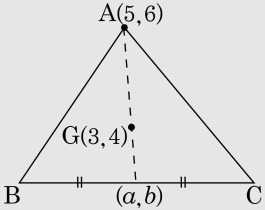
④ $(3,\ 4)$ ⑤ $(4,\ 5)$

해설

무게중심은 중선을 2 : 1 로 내분한다.

$$\therefore\ \mathrm{G}\left(\frac{2a+5}{2+1},\ \frac{2b+6}{2+1}\right) = (3,\ 4)$$

$$\therefore\ a = 2,\ b = 3$$



9. 정점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$
② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$
④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a,b)$ 라고 하면

$3a-4b-11=0\ \cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x,y)$ 라고 하면

$$x=\frac{3+a}{2},\ y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2\ \ \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$

$\therefore\ 3x-4y-6=0$

10. 두 점 A$(3,\ 2)$, B$(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\dfrac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$\left(\dfrac{2a+1\cdot3}{2+1},\ \dfrac{2b+1\cdot2}{2+1}\right)=\left(\dfrac{2a+3}{3},\ \dfrac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

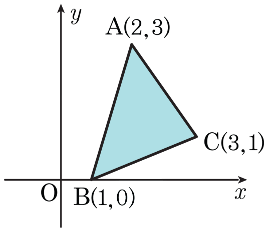
$\dfrac{2a+3}{3}+2\cdot\dfrac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{9}{5},\ b=-\dfrac{2}{5}$ 이다.

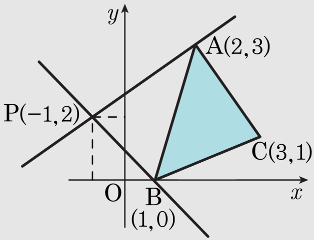
$\therefore\ 3a+b=5$

11. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?



① $-1 \le m \le 3$
② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$
③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$
④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$
⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P(−1, 2) 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore \ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

12. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P$(-4,\ 6)$ ② P$(-4,\ -6)$ ③ P$(2,\ 3)$

④ P$(3,\ 2)$ ⑤ P$(-2,\ -4)$

해설

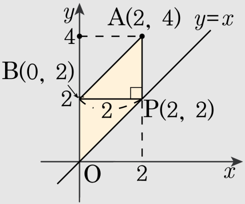
점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore\ x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

13. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(0, 2)$로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

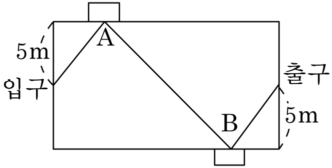
해설

점 P의 좌표를 $(a,\ a)$으로 놓으면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$
양변 제곱하여 정리하면
$2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4$, $8a = 16$
$\therefore\ a = 2$



따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 다음 그림에서
(□ABOP의 넓이)
= (△OBP의 넓이) + (△ABP의 넓이)
$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 + \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

14. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m떨어져 있어야 하는지 구하여라.(단, 이 전시장은 가로 20 m, 세로 10 m인 직사각형 모양이다.)

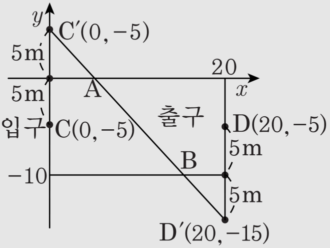


▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** 5 m

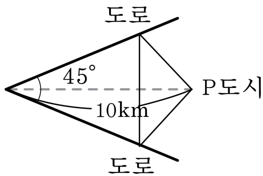
해설

전시장의 입구를 점 C(0, −5), 출구를 점 D(20, −5)라 하자.
점 C(0, −5)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 C′(0, 5)
점 D(20, −5)를 직선 $y = -10$에 대해 대칭이동한 점은 D′(20, −15)이다.



이 때, 직선 C′D′의 방정식은 $y = -x + 5$이다.
점 A의 좌표는 직선 C′D′이 x축과 만나는 점이므로 (5, 0)이다.
따라서, 왼쪽에서 5 m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.

15. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$ 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P′, P″ 이라 하면 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2=10^2+10^2=200 \quad \therefore \ \overline{P'P''}=10\sqrt{2}$