1. $P = a^3 + 4a^2b + 2ab^2$, $Q = -2a^2b + 3ab^2 - b^3$ 일 때, $3P - 2Q$를 계산하면?

① $3a^3 + 12a^2b + 2b^3$　② $3a^3 - 12a^2b + 2b^3$

③ $3a^3 + 16a^2b + 2b^3$　④ $3a^3 + 8a^2b + 2b^3$

⑤ $3a^3 - 8a^2b + 2b^3$

해설

$3(a^3 + 4a^2b + 2ab^2) - 2(-2a^2b + 3ab^2 - b^3)$
$= 3a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3$
$= 3a^3 + 16a^2b + 2b^3$

2. $(a-b+c)(a-b-c)$를 전개하면?

① $-a^2+b^2-c^2+2ca$　② $a^2-b^2+c^2+2ab$

③ $a^2+b^2+c^2+abc$　④ $a^2-b^2-c^2+2bc$

⑤ $a^2+b^2-c^2-2ab$

해설

$(a-b+c)(a-b-c)$

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2$

$=a^2+b^2-c^2-2ab$

3. 모든 실수 x에 대하여 등식 $3x^2+2x+7=a(x+1)^2+b(x+1)+c$가 성립할 때, 상수 c의 값은?

① -6 ② -7 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

항등식이므로 우변을 전개하여 동류항끼리 비교한다.

$3x^2+2x+7=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

$a=3,\ 2a+b=2,\ a+b+c=7$

$\therefore$ 연립하면 $a=3,\ b=-4,\ c=8$

해설

조립제법 사용

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 3 & 2 & 7 \\ & & -3 & 1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 8 \Rightarrow c \\ & & -3 & \\ \hline & 3 & -4 & \Rightarrow b \\ & \Downarrow & & \\ & a & & \end{array}$$

4. x 의 값에 관계없이 등식 $x^2+13x-18=a(x+2)(x-3)+bx(x+2)+cx(x-3)$ 이 항상 성립할 때, 상수 a,b,c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

준식에
$x=0$을 대입하면 $-18=-6a$에서 $a=3$
$x=3$을 대입하면 $30=15b$에서 $b=2$
$x=-2$을 대입하면 $-40=10c$에서 $c=-4$
$\therefore\ a+b+c=3+2+(-4)=1$

5. $\dfrac{1000^2}{252^2-248^2}$ 은?

① 62500 ② 1000 ③ 500

④ 250 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1000^2}{252^2-248^2} &= \frac{1000\cdot 1000}{(252+248)(252-248)}\\ &= \frac{1000}{500}\cdot\frac{1000}{4}\\ &= 500\end{aligned}$$

6. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

7. 다항식 $6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$을 $3x - 2$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(1) + R$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3 = (3x - 2)Q(x) + R$
양변에 $x = 1$을 대입하면, $13 = Q(1) + R$
$\therefore\ Q(1) + R = 13$

해설

$6x^3 - 7x^2 + 17x - 3$를 $3x - 2$로 직접 나누거나 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구할 수 있다.

8. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

9. 다항식 $f(x)=x^3+2x^2-x+k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$ ② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$ ④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x) \Rightarrow f(1)=0$

$\therefore f(1)=2+k=0, \quad \therefore k=-2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2-x-2$

$=(x-1)(x+1)(x+2)$

10. 다항식 $(x-1)^3+27$을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$ ② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$ ④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$을 A로 치환하면
준 식 $=A^3+27=(A+3)(A^2-3A+9)$
다시 $x-1$을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

11. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

12. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

13. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

14. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$　② $(x+1)(x+2)$　③ $(x+1)(x-2)$

④ $(x-1)(x-2)$　⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$

$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$

$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$

$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

15. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \quad (\text{분배})\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \quad (\text{분배})\\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합})\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

16. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$
$\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면
$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$
$\therefore\ a = 3$

17. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ −1 ⑤ −3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times$ 몫-3
$x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore\ x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.
$x^2 = -x + 1$

$$\begin{aligned} x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\ &= x(-x+1)^2 - 5x \\ &= x^3 - 2x^2 - 4x \\ &= x(-x+1) - 2(-x+1) - 4x \\ &= -x^2 - x - 2 \\ &= -(x^2 + x) - 2 \\ &= -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

18. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　② 3^3-3^4　③ 0

④ 1　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로

두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

19. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $4x+3$　③ $x-1$

④ $4x-9$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x)=(x^2-6x+5)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b\cdots㉠$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7$$
$$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7$$

$$f(x)=(x^2-3x-10)Q_2(x)+11$$
$$=(x-5)(x+2)Q_2(x)+11$$

이므로 $f(1)=-5$, $f(5)=11$이다.

㉠에서

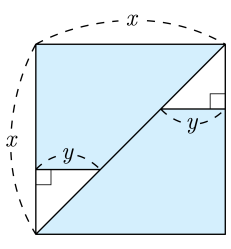
$f(1)=a+b=-5$

$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-9$

따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

20. 다음 그림은 한변의 길이가 x인 정사각형을 대각선을 따라 자른 후 직각이등변삼각형 2개를 떼어낸 도형이다. 이때, 색칠한 부분의 넓이를 x, y에 관한 식으로 나타내어라.



① $xy - y^2$ ② $x^2 - y^2$ ③ $x^2 - y$

④ $\dfrac{xy - y^2}{2}$ ⑤ $\dfrac{x - y}{2}$

해설

$x^2 - 2 \times \dfrac{1}{2} \times y \times y = x^2 - y^2$

21. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

22. 다항식 $(x^3+x^2-2x-1)^5$을 전개한 식이 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{14}x^{14}+a_{15}x^{15}$일 때, $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}-a_{15}$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(x^3+x^2-2x-1)^5$
$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{14}x^{14}+a_{15}x^{15}$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1+1+2-1)^5=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{14}-a_{15}=1$

23. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

24. $2^{16}-1$은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해하면

$2^{16}-1=(2^8)^2-1^2$

$=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\cdot17\cdot5\cdot3$

따라서 $2^{16}-1$을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

25. 등식 $(1+2x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1+2x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}\cdots$㉠
㉠은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$2^{10}=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots$㉡
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-2)^{10}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots$㉢
㉡ + ㉢을 하면
$2^{10}+(-2)^{10}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$
$2\times2^{10}=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$
$\therefore\ a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20}=2^{10}$