1. 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $(A \cap B) \subset B$	㉡ $A \cap \varnothing = A$
㉢ $(A \cup B) \subset B$	㉣ $B \cup \varnothing = B$

① ㉠,㉣　② ㉡,㉢　③ ㉢,㉣
④ ㉠,㉢,㉣　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉡ $A \cap \varnothing = \varnothing$
㉢ $B \subset (A \cup B)$

2. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 8, 10\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는?

① $\{2\}$ ② $\{4\}$ ③ $\{2, 4\}$
④ $\{2, 6\}$ ⑤ $\{2, 4, 6\}$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 8, 10\} - \{4, 8, 10\} = \{2, 6\}$ 이다.

3. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \cap (A \cap B^c)^c$을 간단히 나타내면?

① A ② B ③ A^c ④ $A \cap B$ ⑤ $A \cup B$

해설

$$\begin{aligned} A \cap (A \cap B^c)^c &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

4. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$　　② $P \cup Q$　　③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$　　⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

5. 두 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{p, q, r, s\}$가 있다. X 에서 Y로의 일대일 함수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: ____________ 개

▷ 정답: 24 개

해설

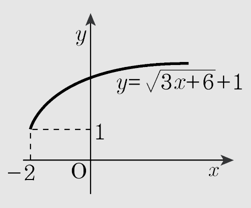
a에 대응하는 수가 b에 대응해서는 안 되고
a, b에 대응하는 수가 c에 대응해서는 안되므로
$\therefore 4 \times 3 \times 2 = 24$(개)

6. 함수 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프가 지나는 모든 사분면은?

① 제 1 , 2 사분면　　② 제 1 , 3 사분면
③ 제 1 , 4 사분면　　④ 제 1 , 2 , 3 사분면
⑤ 제 1 , 3 , 4 사분면

해설

$y = \sqrt{3x+6}+1 = \sqrt{3(x+2)}+1$
주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.



따라서 $y = \sqrt{3x+6}+1$ 의 그래프는 제 1 , 2 사분면을 지난다.

7. 두 집합 A, B가 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, 옳지 않은 것은? (단, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, U 는 전체집합)

① $A \cap B = A$　② $A \cap B = A \cup B$

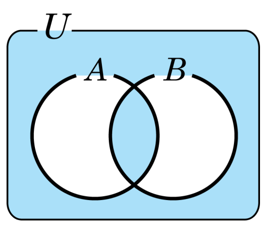
③ $n(A \cup B) = n(B)$　④ $n(A) = n(A \cap B)$

⑤ $A \cup B = A - B$

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이면 $A = B$ 이므로
$A \cup B = A = B = A \cap B, A - B = \phi$

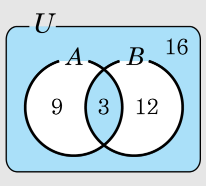
8. 다음과 같은 벤 다이어그램에서 $n(U) = 40, n(A) = 12, n(B) = 15, n(A \cap B^c) = 9$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수는?



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

각 집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 다음 그림과 같으므로 $3 + 16 = 19$ 이다.



9. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$\frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2b}{a} \times \frac{2c}{b} \times \frac{2a}{c}} = 3 \times 2 = 6$

$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{2c}{b} + \frac{2a}{c} \geq 6$

10. 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y)+f(x-y)$이고 $f(1) = 1$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

임의의 실수 x, y에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$가 성립하므로,
$x = 1$, $y = 0$을 대입하면
$f(1)f(0) = f(1) + f(1)$
$\therefore \quad f(0) = f(1) + f(1) = 2$

11. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = -|x|,\ g(x) = -x^2$ 의 관계는?

① 두 함수는 상등이다. ② 두 함수는 상등이 아니다.

③ $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$ ④ $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$

⑤ $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$ $f(0) = g(0) = 0$
$f(1) = g(1) = -1$
따라서 두 함수는 상등이다.

12. $a,\ b$가 유리수이고, 방정식 $(x+1)^3+2(x+1)^2-a(x+1)-b=0$의 한 근이 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$일 때 $a,\ b$의 값을 구하면?

① $a=2,\ b=4$
② $a=2,\ b=-4$
③ $a=-2,\ b=4$
④ $a=-2,\ b=-4$
⑤ $a=-2,\ b=3$

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$이므로 주어진방정식에 대입하면
$2\sqrt{2}+4-a\sqrt{2}-b=0,\ \ \sqrt{2}(2-a)+(4-b)=0$
$a,\ b$는 유리수이므로 $2-a=0,\ 4-b=0$
$\therefore\ a=2,\ b=4$

13. $-\frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ 에서 함수 $y = \sqrt{3x+a}+2$ 의 최댓값이 b , 최솟값이 2 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = \sqrt{3x+a}+2 = \sqrt{3\left(x+\frac{a}{3}\right)}+2$

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다.

i) $x = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 가지므로

$2 = \sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a}+2 \quad \therefore\ a = 1$

ii) $x = \frac{8}{3}$ 일 때 최댓값을 가지므로

$b = \sqrt{3\cdot\frac{8}{3}+1}+2 = 5$

i), ii) 에서 $a+b = 1+5 = 6$

14. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$
$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$
$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

15. 집합 $A = \{x \mid x$는 a 이하인 5의 배수$\}$ 에 대하여 집합 A 의 부분집합의 개수가 32 개가 되기 위한 자연수 a 의 값은?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

$32 = 2^5$ 이므로 집합 A 의 원소의 개수는 5 개이어야 한다.
$A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25\}$ 이므로 $a = 25$ 이다.

16. 네 조건 p, q, r, s에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건, r은 q이기 위한 필요조건, s는 $\sim r$이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $r \to q$　　② $q \to \sim p$　　③ $s \to \sim q$

④ $\sim s \to \sim p$　　⑤ $\sim r \to p$

해설

$p \to q \quad s \to \sim r \quad q \to r$

$q \to r$의 대우 : $\sim r \to \sim q$

$\therefore s \to \sim r, \sim r \to \sim q$ 이므로 $s \to \sim q$

17. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$
Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$
Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기>

ㄱ $f(2) = 1$　　ㄴ $f(3) = 3f(1)$

ㄷ $f(-1) > f(1)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

18. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=2$, $abc=3$일 때, $\dfrac{1}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$의 값은?

① $-\frac{1}{9}$　② $-\frac{2}{9}$　③ $-\frac{1}{3}$　④ $-\frac{4}{9}$　⑤ $-\frac{3}{5}$

해설

$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=9$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=2$

$\therefore\ ab+bc+ca=-1$

$\therefore$ (준식)$=\dfrac{1}{9}+\dfrac{ab+bc+ca}{abc}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{9}$

19. 집합 $S = \left\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 A 가 다음과 같은 조건을 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하여라.

• $x \in A$ 이면 $\frac{1}{x} \in A$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 15 개

해설

주어진 집합은 원소의 역수가 반드시 A 의 원소가 되어야 하는 조건을 가진다.

$\left(\frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1, 1)$ 은 역수 관계에 있는 두 수의 쌍이다.

(1) 원소의 개수가 1 개인 집합 : $\{1\} \Rightarrow 1$ 개

(2) 원소의 개수가 2 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(3) 원소의 개수가 3 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, 1, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1, 3\right\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \Rightarrow 3$ 개

(4) 원소의 개수가 4 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2,} 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(5) 원소의 개수가 5 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 1, 3, 4\right\}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2,} 1, 2, 3\right\} \Rightarrow 3$ 개

(6) 원소의 개수가 6 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

(7) 원소의 개수가 7 개인 집합 : $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\} \Rightarrow 1$ 개

따라서 집합 A 의 개수는 $1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 15$ (개)

20. 대열의 길이가 5 km 인 부대가 일정한 속도로 걸어서 이동하고 있다. 이 때 부대의 맨 끝에서 말을 타고 있던 전령이 이 부대의 맨 앞에 있는 장군에게 긴급히 전해줄 편지가 있었다. 이 전령은 말을 타고 일정한 속도로 부대가 이동하는 방향을 따라 신속히 부대의 맨 앞의 장군에게 편지를 전해주고 바로 반대 방향으로 이동해 부대의 맨 끝으로 왔다. 그 동안에 대열 전체는 5 km 를 이동했다고 할 때, 이 전령이 움직인 거리는? (단, $\sqrt{2} = 1.414$)

① 약 10.4 km ② 약 11.5 km ③ 약 12.1 km

④ 약 12.6 km ⑤ 약 13.2 km

해설

부대의 이동 속도를 1, 전령의 이동 속도를 v
전령이 부대 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간을 t_1
부대 뒤로 되돌아오는데 걸리는 시간은 t_2 라 하면

$$\begin{cases} vt_1 = 5 + 1 \cdot t_1 \cdots ㉠ \\ vt_2 = 5 - 1 \cdot t_2 \cdots ㉡ \\ 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 = 5 \end{cases}$$

㉠ − ㉡에서 $v(t_1 - t_2) = t_1 + t_2 = 5 \ \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡에서 $v(t_1 + t_2) = 10 + (t_1 - t_2)$
$\therefore 5v = 10 + (t_1 - t_2) \ \cdots$ ㉣($\because$ ㉢에서)
㉢, ㉣에서 $v(5v - 10) = 5$
$v^2 - 2v - 1 = 0,\ v = 1 + \sqrt{2}(\because v > 1)$

$$\begin{aligned}(\text{전령이 움직인 거리}) &= v(t_1 + t_2) \\ &= 5(1 + \sqrt{2}) \\ &= 5 \times 1 + 5 \times 2.414 \\ &= 12.07\end{aligned}$$

따라서 약 12.1km를 전령이 움직였다.

해설

부대의 이동 속도를 a, 전령의 이동 속도를 b라 하면

부대가 5 km 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{a}$

전령이 부대의 맨 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b-a}$

전령이 부대의 맨 뒤로 되돌아오는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b+a}$ 이다.

$\frac{5}{b-a} + \frac{5}{b+a} = \frac{5}{a}$ 에서

$b = (1 + \sqrt{2})a$

$\therefore$(전령이 움직인 거리)$= (1 + \sqrt{2})a \cdot \frac{5}{a} \fallingdotseq 5 \times 2.414 = 12.07$

따라서 약 12.1km를 전령이 움직였다.