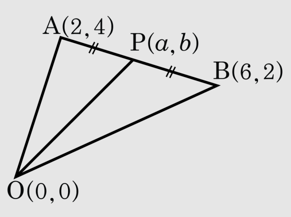
1. 세 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,4), \mathrm{B}(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $\mathrm{P}(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle\mathrm{OAB}$ 와 $\triangle\mathrm{OAP}$ 의 높이가 같으므로
$\triangle\mathrm{OAB} = 2\triangle\mathrm{OAP}$ 이려면
P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $\mathrm{P}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $\mathrm{P}\,(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
$\therefore a+b=7$



2. 세 점 $A(0,0)$ $B(1,1)$ $C(0,2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는?

① $(0,1)$ ② $(1,0)$ ③ $(0,-1)$
④ $(-1,0)$ ⑤ $(1,-1)$

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로
$\triangle ABC$는 $\angle B = 90°$인 직각삼각형이다.
$\triangle ABC$의 외심은 빗변인 $\overline{AC}$의 중점이다.
$\therefore$ 외심은 $(0,1)$

3. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ____ m

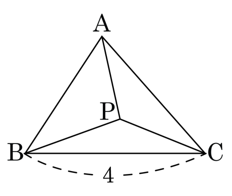
▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

4. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 ABC 의 임의의 내부의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$ 의 최솟값은?

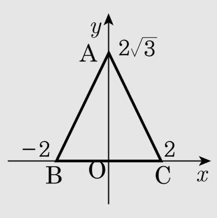


① 16 ② 17 ③ 18

④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC 를 x축,
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점을 원점 O,
직선 AO 를 y축으로 잡으면
$\mathrm{A}\left(0, 2\sqrt{3}\right), \mathrm{B}(-2, 0), \mathrm{C}(2, 0)$



$\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$
$= x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$
$= 3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$
$= 3x^2+3\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$ 은
$x=0, y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16 을 갖는다.

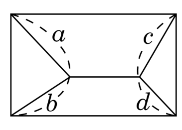
5. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$
$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$
$\quad+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$
$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$
$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$
$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$
이때, $a,\ b$는 실수이므로
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은
$a=1,\ b=3$일 때 최소이다.
$\therefore a+b=4$

6. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $\sqrt{a}+\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{d}$

② $a+c=b+d$

③ $a+b=c+d$

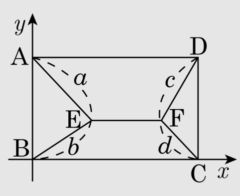
④ $a^2+d^2=b^2+c^2$

⑤ $a^2+b^2=c^2+d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면

A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.



이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$ 라고 하면

$a^2=x^2+(y-q)^2$

$b^2=x^2+y^2$

$c^2=(z-p)^2+(y-q)^2$

$d^2=(z-p)^2+y^2$ 이므로

$\therefore\ a^2+d^2=b^2+c^2$

7. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

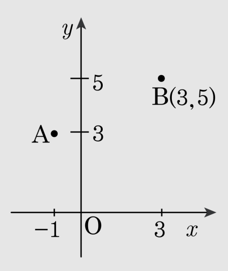
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



8. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$ 에서 같은 거리에 있는 점 P 의 좌표가 $(a,\ b)$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 잇는 점 P 는 $(\alpha,\ \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2,\ \alpha = 2$

$\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 1)$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 5$

9. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, -3)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 외심의 좌표는?

① O$\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　② O$\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　③ O$\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ O$\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　⑤ O(0, 0)

해설

두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{CO}},\ \overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{CO}}$ 에서
$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{\mathrm{AO}} = \overline{\mathrm{BO}}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5},\ \ y = 0$
따라서 외심의 좌표는 O$\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

10. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore\ x = \pm 6$

$x > 0$이므로 $x = 6$

11. 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(0,\ -1)$를 이은 선분 AB, 또는 그연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 $1:1$ 내분점이거나 $3:1$ 외분점이다.

i) $1:1$ 내분점은 $\left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{3+(-1)}{2}\right) = (1,1)$

ii) $3:1$ 외분점은

$\left(\dfrac{3\times 0 - 1\times 2}{3-1},\ \dfrac{3\times(-1) - 1\times 3}{3-1}\right) = (-1,\ -3)$

i), ii) 사이 거리는

$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$

12. 세 꼭짓점이 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 3)$, C$(0,\ 1)$인 $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle$DEF의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle$ABC에서 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle$ABC의 무게중심과 일치한다.
$\triangle$ABC의 무게중심은
$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right)$,
즉 $(1,\ 1)$이므로 $\triangle$DEF의 무게중심은 $(1,\ 1)$이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

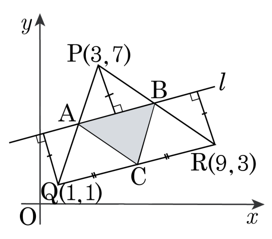
13. 정점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P , x축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.
$y=x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2,4)$
x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4,-2)$ 이므로
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}} \geq \overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$
$= \sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2} = 2\sqrt{10}$

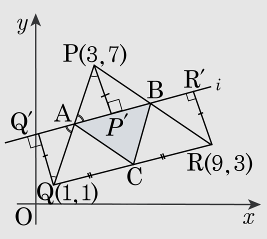
14. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 P(3, 7), Q(1, 1), R(9, 3) 으로부터 같은 거리에 있는 직선 l 이 선분 PQ, PR 과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 QR 의 중점을 C 라 할 때, △ABC 의 무게중심의 좌표를 G(x, y) 라 하면 $x+y$ 의 값은?



① $\frac{16}{3}$　② 6　③ $\frac{20}{3}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 8

해설

세 점 P, Q, R 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′ 라 하면 △PAP′ ≡ △QAQ′ (∵ ASA 합동) 이므로

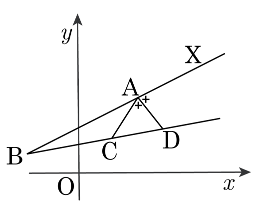


점 A 는 선분 PQ 의 중점이다.
마찬가지로 점 B 는 선분 PR 의 중점이다.
따라서, 세 점 A, B, C 는 각각 선분 PQ , 선분 PR , 선분 QR 의 중점이므로 △ABC 의 무게중심은 △PQR 의 무게중심과 일치한다.
△ABC 의 무게중심을 G(x, y) 라 하면

$x=\frac{3+1+9}{3}=\frac{13}{3}$, $y=\frac{7+1+3}{3}=\frac{11}{3}$

따라서, $x+y=\frac{13}{3}+\frac{11}{3}=8$

15. 다음 좌표평면에서 세 점 A(7, 6), B(−5, 1), C(3, 3) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 변 BA의 연장선 위에 한 점 X 를 잡고, ∠XAC의 이등분선이 변 BC의 연장선과 만나는 교점을 D(x, y) 라 할 때, $x+4y$ 의 값을 구하면?

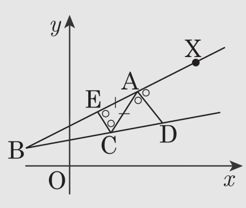


▶ 답:

▷ 정답: 25

해설

그림과 같이 점 C에서 $\overline{AD}$ 와 평행하게 $\overline{CE}$ 를 그리면



$\angle AEC = \angle ACE$ 가 되어 $\overline{CA} = \overline{EA}$가 성립한다.

$\overline{BA} : \overline{EA}(\overline{CA}) = \overline{BD} : \overline{CD}$

$\overline{BA} = \sqrt{(7+5)^2+(6-1)^2} = \sqrt{169} = 13$

$\overline{CA} = \sqrt{(7-3)^2+(6-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

따라서 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5 로 외분하는 점이다.

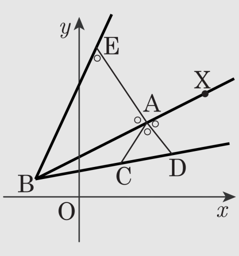
$x = \dfrac{13\times3-5\times(-5)}{13-5} = 8$,

$y = \dfrac{13\times3-5\times1}{13-5} = \dfrac{17}{4}$

$\therefore x+4y = 8+4\times\dfrac{17}{4} = 25$

해설

다음 그림과 같이 $\overline{AC}$ 와 평행이 되게 점 B에서 그린 직선과 $\overline{AD}$ 의 연장선과의 교점을 E 라 하면 △ACD 와 △EBD 는 닮음이고, △ABE 는 이등변삼각형이다.



$\overline{DC} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{AB}$

즉, 점 D 는 $\overline{BC}$ 를 $\overline{AB} : \overline{AC}$ 로 외분하는 점이다.

(이하는 위의 해설과 같은 과정이다.)