

1. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m 의 값의 합은?

$m^2x - 1 > m(x - 1)$

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$m^2x - 1 > m(x - 1)$ 에서
 $m^2x - 1 > mx - m$
 $\therefore (m^2 - m)x > 1 - m \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 해가 없어야 하므로
 $m^2 - m = 0, 1 - m \geq 0$
 $m^2 - m = 0$ 에서 $m(m - 1) = 0$
 $\therefore m = 0$ 또는 $1 \cdots \textcircled{2}$
 $1 - m \geq 0$ 에서 $m \leq 1 \cdots \textcircled{3}$
따라서 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $m = 0$ 또는 $m = 1$

2. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -3$

해설

$$(a+b)x + (2a-3b) < 0$$

$$(a+b)x < 3b-2a$$

$$\Rightarrow x < \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0)$$

$$\Rightarrow a+b = -3(3b-2a)$$

$$\Rightarrow a = 2b, \quad a+b = 3b > 0 \rightarrow b > 0$$

$$(a-3b)x + (b-2a) > 0 \Leftrightarrow -bx - 3b > 0$$

$$bx < -3b$$

$$\therefore x < -3 \quad (\because b > 0)$$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+2 \leq 11 \\ 2-x < 3x+10 \end{cases}$ 을 만족시키는 가장 큰 정수를 a ,
가장 작은 정수를 b 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 8 ⑤ 11

해설

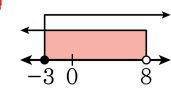
$3x+2 \leq 11$, $x \leq 3$
 $2-x < 3x+10$, $x > -2$
 $-2 < x \leq 3$ 이므로 $a = 3$, $b = -1$
 $\therefore a+b = 3+(-1) = 2$

4. 연립부등식

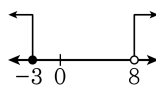
$$\begin{cases} 2(x-4) < x \\ 2x+3 \leq 3(x+2) \end{cases}$$

의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

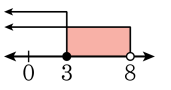
①



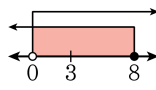
②



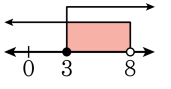
③



④



⑤



해설

1. $2(x-4) < x, x < 8$

2. $2x+3 \leq 3(x+2), x \geq -3$

공통된 해를 찾으려면 $-3 \leq x < 8$

5. 부등식 $4x-1 \leq 3x+1 < 2x+5$ 를 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$4x-1 \leq 3x+1 < 2x+5$ 는 $4x-1 \leq 3x+1$, $3x+1 < 2x+5$ 두 식으로 나뉜다.

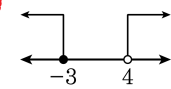
각각을 정리하면 $x \leq 2$, $x < 4$ 이다.

$\therefore x \leq 2$

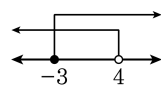
따라서 범위 안의 가장 큰 정수는 2 이다.

6. 연립부등식 $\begin{cases} 7x - 10 > 2x + 10 \\ 5x + 3 \leq 2(x - 3) \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

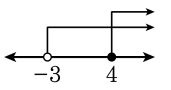
①



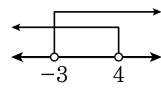
②



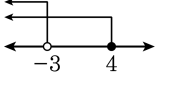
③



④



⑤



해설

$$\begin{aligned} 7x - 10 &> 2x + 10, 5x > 20, x > 4 \\ 5x + 3 &\leq 2x - 6, 3x \leq -9, x \leq -3 \\ \therefore x &\leq -3, x > 4 \end{aligned}$$

7. 연립부등식 $-3 < \frac{x+a}{4} < 1$ 의 해가 $-9 < x < b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$-3 < \frac{x+a}{4} < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 < \frac{x+a}{4} \\ \frac{x+a}{4} < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -12 < x+a \\ x+a < 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -12-a \\ x < 4-a \end{cases}$$

$$-12-a < x < 4-a \text{ 이므로 } -12-a = -9$$

$$\therefore a = -3$$

$$4-a = b \text{ 이므로 } 4 - (-3) = b$$

$$\therefore b = 7$$

$$\text{따라서 } a+b = -3+7 = 4 \text{ 이다.}$$

8. 연립부등식

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x + 1) + 1 < 4x - 1 \\ -a < x < a \end{cases} \quad \text{의 해가 없을 때, 양수 } a \text{의 값의}$$

범위는?

① $0 < a < 2$

② $0 < a \leq 2$

③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \leq 3$

⑤ $2 < a < 3$

해설

$$\begin{cases} 12 - x < 2(x + 1) + 1 < 4x - 1 \cdots \textcircled{㉠} \\ -a < x < a \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

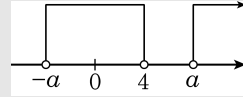
$\textcircled{㉠} : 12 - x < 2(x + 1) + 1$ 의 해는 $x > 3$

$2(x + 1) + 1 < 4x - 1$ 의 해는 $x > 2$

$\therefore x > 3$

$\textcircled{㉡} : -a < x < a$

연립부등식의 해가 없으려면 다음 그림과 같아야 하므로 양수 a 의 값의 범위는 $0 < a \leq 3$ 이다.



9. 지현이는 100 원짜리와 500 원짜리 동전으로만 5000 원을 가지고 있다. 100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적을 때, 500원짜리 동전의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 7 개

해설

100 원짜리 동전의 개수를 x 개, 500 원짜리 동전의 개수를 y 개
라고 하면,

$$100x + 500y = 5000, x + 5y = 50, x = 5(10 - y)$$

100 원짜리 동전의 개수는 500 원짜리 동전의 개수의 2 배보다는 많고 3 배보다는 적다고 하였으므로,

$$2y < x < 3y, 2y < 5(10 - y) < 3y, \frac{25}{4} < y < \frac{50}{7} \text{ 이고, 이를}$$

만족하는 자연수 $y = 7$ 이다.

500 원짜리 동전의 개수는 7 개이다.

10. 부등식 $|x^2 - 4x - 6| \leq 6$ 의 해를 구하면?

① $-2 \leq x < 6$

② $0 \leq x \leq 4$

③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 6$

④ $-2 \leq x \leq 0$ 또는 $4 \leq x \leq 6$

⑤ $x \leq 0$ 또는 $x \geq 4$

해설

$$|x^2 - 4x - 6| \leq 6 \text{에서}$$

$$\frac{-6 < x^2 - 4x - 6 \leq 6}{\textcircled{1} \qquad \qquad \textcircled{2}}$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } x^2 - 4x \geq 0, x(x - 4) \geq 0 \\ \therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 4$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } x^2 - 4x - 12 \leq 0, (x + 2)(x - 6) \leq 0 \\ \therefore -2 \leq x \leq 6$$

따라서 공통 범위를 구하면

$$-2 \leq x \leq 0 \text{ 또는 } 4 \leq x \leq 6$$

11. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \leq 0$ 이 해를 갖지 않을 때, 실수 k 값의 범위는?

① $-1 \leq k \leq 0$

② $-2 < k < 0$

③ $0 \leq x \leq 2$

④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는 $k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면

방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$ 이 허근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0, \quad k(k - 2) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 2$$

12. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$

② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ ($\alpha < 0 < \beta$) 이므로

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta), \quad a > 0$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore c < 0$$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c \left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} \right) \\ &= c \left(x^2 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta} \right) \\ &= c \left\{ x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)x + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \right\} \\ &= c \left(x - \frac{1}{\alpha} \right) \left(x - \frac{1}{\beta} \right) < 0 \end{aligned}$$

$$c < 0 \text{ 이고 } \frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta} \text{ 이므로 구하는 해는 } x < \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } x > \frac{1}{\beta}$$

13. 양의 실수 a 에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$ 의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$ 을 만족할 때, a 의 값의 범위는?

- ① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
 ④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$$-x^2+7x-10 \geq 0$$

$$x^2-7x+10 \leq 0$$

$$(x-2)(x-5) \leq 0$$

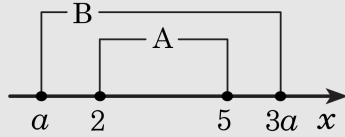
$$2 \leq x \leq 5$$

$$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$$

$$(x-a)(x-3a) \leq 0$$

$$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$$

㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2, 3a \geq 5$ 이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

14. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

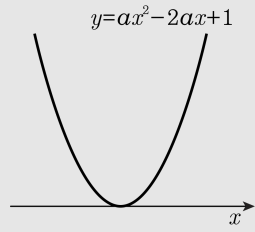
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

15. 이차함수 $y = x^2 + x + 1$ 의 그래프가 함수 $y = kx^2 + kx - 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-5 \leq k < 1$ ② $-2 < k \leq 3$ ③ $-7 < k \leq 1$
④ $1 < k \leq 5$ ⑤ $1 \leq k < 7$

해설

$x^2 + x + 1 > kx^2 + kx - 1$ 에서
 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 < 0$
(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때
 $-2 < 0$ 이므로 부등식은 항상 성립한다.
(ii) $k-1 \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 일 때
주어진 부등식이 항상 성립하려면 $k-1 < 0$
 $\therefore k < 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
한편, 이차방정식 $(k-1)x^2 + (k-1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (k-1)^2 + 8(k-1) < 0$ 에서
 $(k+7)(k-1) < 0$
 $\therefore -7 < k < 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}$, $\textcircled{\text{㉡}}$ 의 공통범위를 구하면 $-7 < k < 1$
(i), (ii) 에서 $-7 < k \leq 1$

16. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + ax + b < 0 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases}$ 의 해가

$-3 < x \leq 1$ 이고, $|a| + |b| = 5$ 를 만족하는 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$|x - 2| \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$ 또는 $x \leq 1$
 또, 해가 $-3 < x \leq 1$ 이므로
 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 -3 임을 알 수 있다.
 따라서, 두 근을 $\alpha, -3$ 이라고 하면
 근과 계수의 관계에서
 $-a = (\alpha - 3) < 0 \Rightarrow a > 0 \dots ①$
 $b = \alpha \times (-3) < 0 \dots ②$
 ①, ②에서 $|a| + |b| = 5 \Rightarrow a - b = 5$
 $x = -3$ 대입 $9 - 3a + b = 0$
 $\Rightarrow a = 2, b = -3$
 $\therefore a + b = -1$

17. $n, n+5, n+8$ 이 둔각삼각형의 세 변의 길이가 되는 자연수 n 의 개수는?

① 4

② 6

③ 7

④ 9

⑤ 무수히 많다.

해설

삼각형의 결정조건에서

$$n + (n + 5) > n + 8, n > 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

둔각삼각형일 조건에서 $n^2 + (n + 5)^2 < (n + 8)^2$

$$n^2 - 6n - 39 < 0, 3 - \sqrt{48} < n < 3 + \sqrt{48} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 자연수인 n 은

$n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (6개)

18. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

19. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$

② $m > -2$

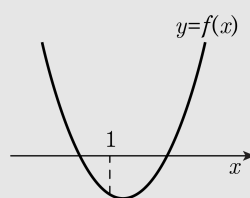
③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$

⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 $f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$
 $\therefore m > 5$



20. 이차방정식 $x^2 + ax - 2 = 0$ 의 두 실근 α, β 에 대하여 $-2 < \alpha < 0, 1 < \beta < 3$ 이 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-\frac{13}{3} < a < -1$ ② $-\frac{10}{3} < a < 0$ ③ $-\frac{7}{3} < a < 1$
④ $-\frac{5}{3} < a < 2$ ⑤ $-\frac{2}{3} < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + ax - 2$ 로 놓으면 $-2 < \alpha < 0, 1 < \beta < 3$ 이므로

$f(-2) > 0, f(0) < 0, f(1) < 0, f(3) > 0$ 이어야 한다.

$f(-2) = -2a + 2 > 0$ 에서 $a < 1$

$f(0) = -2 < 0$

$f(1) = a - 1 < 0$ 에서 $a < 1$

$f(3) = 3a + 7 > 0$ 에서 $a > -\frac{7}{3}$

$\therefore -\frac{7}{3} < a < 1$