1. 함수 $y = 2x^2 + 1 - a(x^2 - 1)$ 이 이차함수일 때, 다음 중 a 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 식 $y = 2x^2+1-a(x^2-1)$ 을 정리하면 $y = (2-a)x^2+a+1$ 이차함수가 되려면 x^2 의 계수 $2 - a \neq 0$ 이어야 한다.

$\therefore a \neq 2$

2. 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + 6$ 에 대하여 $f(-2) = 8$, $f(1) = b$를 만족할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$f(-2) = 4 - 2a + 6 = 8, a = 1$ 이고 $f(1) = 1 + 1 + 6 = 8 = b$ 이므로 $b - a = 8 - 1 = 7$ 이다.

3. 원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프 $y = f(x)$ 에 대하여 $2f\left(\frac{1}{2}\right) - f(-2) = 7$ 일 때, 다음 중 이 그래프 위의 점이 아닌 것은 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $(1, -2)$ ㉡ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}\right)$ ㉢ $(3, -12)$
㉣ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ ㉤ $(-4, -30)$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$f(x) = ax^2$ 에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a$, $f(-2) = 4a$ 이므로

$2f\left(\frac{1}{2}\right) - f(-2) = 7$, $2 \times \frac{1}{4} \times a - 4a = 7$, $-7a = 14$, $a = -2$ $\therefore f(x) = -2x^2$

㉢ $f(3) = -2 \times (-3)^2 = -18$ $\therefore (3, -18)$

㉤ $f(-4) = -2 \times (-4)^2 = -32$ $\therefore (-4, -32)$

따라서 주어진 그래프 위의 점이 아닌 것은 ㉢,㉤의 2 개이다.

4. 이차함수 $y = \frac{3}{2}x^2$ 의 그래프와 x 축 대칭인 이차함수의 그래프가 점 $(2a,\ -a-5)$ 를 지날 때, 모든 a 의 값의 합은?

① -1 ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$-a-5 = -\frac{3}{2}(2a)^2$

$6a^2 - a - 5 = 0$

근과 계수의 관계에 의해 모든 a 의 값의 합은 $\frac{1}{6}$ 이다.

5. 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 2 만큼 평행이동한 그래프에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 이차함수의 식은 $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2+2$ 이다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ -2)$ 이다.

③ 그래프는 $\left(0,\ \frac{4}{3}\right)$ 을 지난다.

④ 그래프는 모든 사분면을 지난다.

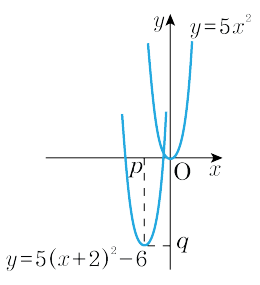
⑤ 그래프는 위로 볼록하다.

해설

$y=-\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 2 만큼 평행이동하면 $y=-\frac{2}{3}(x+1)^2+2$ 이다.

따라서 꼭짓점의 좌표 $(-1,2)$ 이다.

6. $y = 5x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 다음 그림과 같았다. 이 때, $p + q$ 의 값은?



① 4 ② 8 ③ −4

④ −8 ⑤ 12

해설

$y = ax^2$ 의 그래프를 y 축으로 q 만큼, x 축으로 p 만큼 평행이동하면 $y = a(x - p)^2 + q$ 인데 함수의 식이 $y = 5(x + 2)^2 - 6$ 이므로 $p = -2$, $q = -6$ 이다. 따라서 $p + q = -8$ 이다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 24$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x$ 의 위에 있을 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = x^2 - 4ax + 24$
$= (x - 2a)^2 - 4a^2 + 24$

꼭짓점 $(2a,\ -4a^2 + 24)$ 가 직선 $y = 2x$ 의 위에 있으므로

$-4a^2 + 24 = 4a$
$a^2 + a - 6 = 0$
$(a - 2)(a + 3) = 0$

따라서 양수 $a = 2$ 이다.

8. 이차함수 $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ 의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소하는 x의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $x > -\frac{1}{2}$

해설

축의 방정식이 $x = -\frac{1}{2}$ 이고, 위로 볼록하므로

$x > -\frac{1}{2}$ 일 때, x의 값이 증가하면, y의 값은 감소한다.

9. 이차함수 $y = 3(x-4)^2 - 5$ 의 그래프를 y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭 이동한 그래프의 식을 구하면?

① $y = 3(x-4)^2 - 2$　② $y = -3(x-4)^2 - 5$

③ $y = 3(x-1)^2 - 5$　④ $y = -3(x-1)^2 - 2$

⑤ $y = -3(x-4)^2 + 2$

해설

y축 방향으로 3만큼 평행이동하면
$y = 3(x-4)^2 - 5 + 3 = 3(x-4)^2 - 2$
x 축에 대하여 대칭이동하면
$-y = 3(x-4)^2 - 2$
$y = -3(x-4)^2 + 2$

10. 이차함수 $y = ax^2 + 4x + q$ 를 $y = -\frac{1}{3}(x-p)^2 + 10$ 으로 나타낼 수 있고 꼭짓점이 $(p, 10)$ 이다. 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = -\frac{1}{3}(x^2 - 2px + p^2) + 10$

$= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2px}{3} - \frac{1}{3}p^2 + 10$ 이므로

$a = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$p = 4, p = 6$ 이고

$q = -\frac{1}{3}p^2 + 10 = -\frac{1}{3}(36) + 10 = -2$ 이다.

따라서 $apq = -\frac{1}{3} \times 6 \times (-2) = 4$ 이다.

11. 다음 이차함수의 그래프 중 $y = 3x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 것을 모두 고르면?

① $y = 3x^2 + 1$

② $y = -3x^2 + 4$

③ $y = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$

④ $y = -3(x+1)^2$

⑤ $y = x^2 - 5x + 2 + 2(x-1)(x+1)$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행이동하여 두 이차함수의 그래프를 완전히 포갤 수 있다.
따라서 $a = 3$ 인 것은 ①, ③, ⑤이다.

12. 이차함수 $y = 4x^2 + kx + 2$의 그래프의 꼭짓점이 $y = x - 1$의 그래프 위에 있고 $x > a$이면 y의 값이 증가하고, $x < a$이면 y의 값은 감소한다. 이 때 꼭짓점의 좌표를 구하여라. (단, $a < 0$)

① $(-1, -1)$ ② $(-1, -2)$ ③ $(1, 1)$
④ $(1, 2)$ ⑤ $(1, 3)$

해설

축의 방정식이 $x = a$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표가 a 이다.
따라서 $(a, a-1)$ 을 지나므로 $y = 4(x-a)^2 + a - 1 = 4x^2 - 8ax + 4a^2 + a - 1$ 이고 $4a^2 + a - 1 = 2$ 이다.
따라서 $(4a - 3)(a + 1) = 0$ 이므로 $a = -1 (a < 0)$ 이므로 꼭짓점은 $(-1, -2)$ 이다.

13. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 2k - 5$ 의 꼭짓점이 직선 $y = x + 2$ 위에 있다고 한다. 이때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = \frac{1}{2}$

해설

$y = -x^2 + 6x + 2k - 5 = -(x-3)^2 + 2k + 4$
꼭짓점 $(3,\ 2k+4)$ 가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $2k + 4 = 5$,
$2k = 1$
$\therefore k = \frac{1}{2}$

14. 이차함수 $y = 2x^2 + 4x - k$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위는?

① $k > -2$　② $k > -1$　③ $k < -2$
④ $k < -1$　⑤ $k > 0$

해설

아래로 볼록한 포물선이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 꼭짓점의 y 좌표가 음수이어야 한다.
$y = 2x^2 + 4x - k = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - k = 2(x+1)^2 + (-2-k)$
꼭짓점 $(-1, -2-k)$ 에서 $-2-k < 0 \quad \therefore k > -2$

해설

$y = 2x^2 + 4x - k$ 가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나면 방정식 $0 = 2x^2 + 4x - k$ 이 서로 다른 두 근을 갖는다.
$D = 4^2 + 8k > 0 \quad \therefore k > -2$

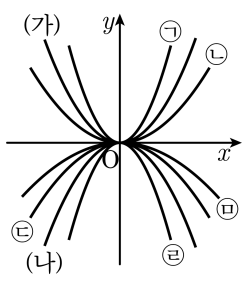
15.

삼차방정식 $36x^3-36x^2+4x+k=0$**이 세 개의 실근** α,β,γ**를 갖고** $\alpha<\beta<\gamma,\ \beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$**를 만족할 때, 상수** k**의 값은?**

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

16. 다음 그림은 모두 꼭짓점이 원점인 포물선이고, $y = x^2$ …(가), $y = -x^2$ …(나)이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = -ax^2$ 의 그래프로 알맞은 것은?



① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
④ ㉤ ⑤ ㉣

해설

$0 < -a < 1$ 이므로 (가)와 x 축 사이에 있는 그래프를 찾으면 ㉡이다.

17. $y = 2x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A$(2,\ p)$, B$(q,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은?(단, $q < 0$)

① $y = 2x - 3$　② $y = -2x + 3$　③ $y = 2x + 4$

④ $y = -2x + 4$　⑤ $y = 2x - 4$

해설

$(2,\ p)$ 를 $y = 2x^2$ 에 대입하면 $p = 2 \times 2^2 = 8$

$(q,\ 2)$ 를 대입하면 $2 = 2q^2$, $q^2 = 1$ 에서 $q = \pm 1$

그런데 $q < 0$ 이므로 $q = -1$

$(2,\ 8)$, $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$(기울기) = \dfrac{8-2}{2-(-1)} = \dfrac{6}{3} = 2$

$y = 2x + b$ 에 $(2,\ 8)$ 을 대입하면

$8 = 2 \times 2 + b \quad \therefore\ b = 4$

따라서 구하는 식은 $y = 2x + 4$

18. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

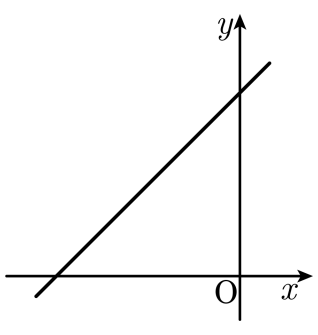
▷ 정답: 5

▷ 정답: -1

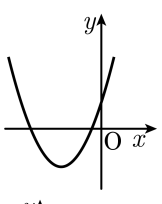
해설

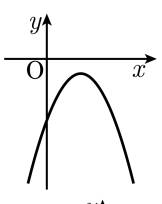
이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y = \frac{2}{3}(x-2)^2$ 이다. 점 $(k,\ 6)$ 을 지나므로 대입하면 $6 = \frac{2}{3}(k-2)^2,\ 9 = (k-2)^2,\ k-2 = \pm 3$ 따라서 $k = 5,\ -1$ 이다.

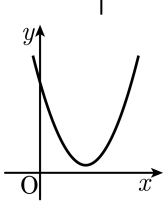
19. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = -a(x-b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것을 보기에서 골라라.

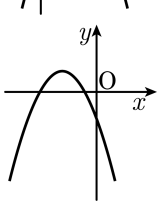


보기

㉠ 

㉡ 

㉢ 

㉣ 

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

그래프가 오른쪽 위를 향하므로 $a > 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다.
따라서 $y = -a(x-b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $b > 0$, $-a < 0$ 이므로
꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있는 그래프이다.

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + 3$ 의 그래프의 축과 직선 $x = -2$는 y 축에 대해 서로 대칭일 때, $\frac{a^2}{b^2}$ 의 값을 구하여라. (단, $ab \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{16}$

해설

$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + 3 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 3$ 이므로 대칭축은 $x = -\frac{b}{2a}$ 이다.

이 축이 $x = -2$ 와 y 축에 대해 대칭이므로 대칭축은 $x = 2$ 이다.

$-\frac{b}{2a} = 2$, $\frac{b}{a} = -4$, $\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{16}$

21. 이차함수 $y = -2x^2 - 12x + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하였더니 점 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -16)$ 을 지났다. $p + q$ 의 값을 구하여라.

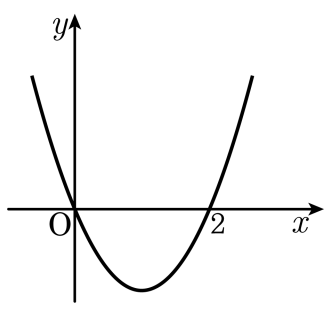
▶ 답 :

▷ 정답 : -19

해설

평행이동한 그래프의 식을
$y = -2x^2 + bx + c$ 라고 하자.
$y = -2x^2 + bx + c$ 의 그래프가 $(-2,\ 0)$, $(0,\ -16)$ 을 지나므로
$0 = -8 - 2b + c,\ -16 = c$
$0 = -8 - 2b - 16 \qquad \therefore\ b = -12$
$y = -2x^2 - 12x - 16 = -2(x + 3)^2 + 2$
$y = -2x^2 - 12x + 3 = -2(x + 3)^2 + 21$
꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 21)$ 에서 $(-3,\ 2)$ 로 이동하였으므로 $p = 0,\ q = -19$ 이다.
$\therefore\ p + q = 0 - 19 = -19$

22. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 의 그래프는 몇 사분면을 지나는가?



① 제 1, 2, 3 사분면
② 제 1, 3 사분면
③ 제 2, 4 사분면
④ 제 2, 3, 4 사분면
⑤ 제 1, 2 사분면

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 에서 $c = 0$

또한, $y = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$ 에서

$-\frac{b}{a} = 2 > 0$

$\therefore \frac{b}{a} < 0$

그러므로 $ax + by + c = 0$ 에서

$y = -\frac{a}{b}x$

$\therefore -\frac{a}{b} > 0 \left(\because \frac{b}{a} < 0\right)$

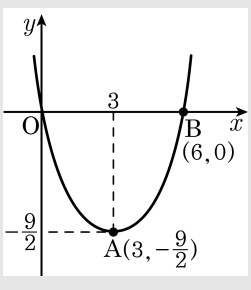
따라서 제1, 3 사분면을 지난다.

23. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ 의 꼭지점을 A , 원점을 O , 점 O 의 포물선의 축에 대하여 대칭인 점을 B 라 할 때, $\triangle OAB$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

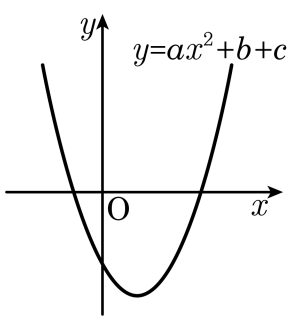
▷ 정답 : $\frac{27}{2}$

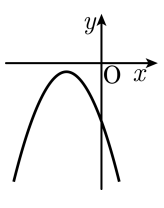
해설

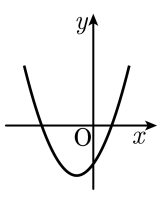


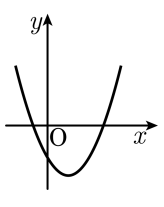
$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$

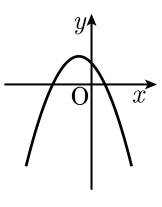
24. $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프의 모양은 어느 것인가?

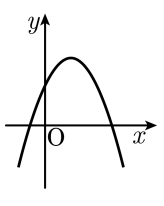


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$

꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{b}{2a} > 0$ 이므로 $b < 0$

y 절편 $c < 0$

따라서 $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{b}{2c} < 0$, y 절편 $a > 0$ 인 포물선이다.

25. 이차함수 $y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y 좌표의 값이 모두 정수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 163 개

해설

$y = \frac{1}{4}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 16$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-8, 16)$, $(8, 16)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-8 \le x \le 8$ 이므로 이 범위 안의 정수는 -8, -7, $\cdots$, 7, 8 의 17개가 있다. 따라서

x 좌표가 -8 일 때 : 1 개

x 좌표가 -7 일 때 :

y 좌표는 13 부터 16 까지이므로 4 개

x 좌표가 -6 일 때 :

y 좌표는 9 부터 16 까지이므로 8 개

x 좌표가 -5 일 때 :

y 좌표는 7 부터 16 까지이므로 10 개

x 좌표가 -4 일 때 :

y 좌표는 4 부터 16 까지이므로 13 개

x 좌표가 -3 일 때 :

y 좌표는 3 부터 16 까지이므로 14 개

x 좌표가 -2 일 때 :

y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개

x 좌표가 -1 일 때 :

y 좌표는 1 부터 16 까지이므로 16 개

x 좌표가 0 일 때 : 1 개

$\therefore\ 2 \times (4 + 8 + 10 + 13 + 14 + 16 + 16) + 1 = 163$ (개)