

1. 이차방정식 $x^2 - 16x + a = 0$ 의 해가 $x = 8 \pm \sqrt{59}$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$x = 8 \pm \sqrt{64 - a}$$

$$\therefore a = 5$$

2. 이차방정식 $0.1x^2 = 1 - 0.3x$ 의 해를 구하면?

① $x = 2$ 또는 $x = 5$

② $x = 2$ 또는 $x = -5$

③ $x = -1$ 또는 $x = 5$

④ $x = -1$ 또는 $x = -3$

⑤ $x = 1$ 또는 $x = -3$

해설

$$0.1x^2 = 1 - 0.3x$$

각 항에 10 을 곱하여 정리하면

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -5$$

3. $(x+y)(x+y-3)-28=0$ 일 때, $x+y$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x+y=7$

▷ 정답: $x+y=-4$

해설

$x+y=A$ 라고 하면

$$A(A-3)-28=0$$

$$A^2-3A-28=0$$

$$(A-7)(A+4)=0$$

$\therefore x+y=7$ 또는 $x+y=-4$

4. 다음 보기에서 이차방정식 중에서 중근을 갖는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $(x-4)(x-4) = 0$

㉡ $x^2 - 4x = 0$

㉢ $x^2 + 9 = 6x$

㉤ $2x^2 + 12x = -9$

㉥ $(x-1)(x+1) = 12x^2 - 5x$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉢

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉢, ㉥

해설

이차방정식이 중근을 가지려면 $(ax+b)^2 = 0$ 이다.

㉠ $x = 4$ (중근)

㉢ $x^2 + 9 = 6x$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \leftrightarrow (x-3)^2 = 0$$

$\therefore x = 3$ (중근)

5. 다음 이차방정식이 해를 1 개 가질 때 k 의 값은?

$$x^2 - 8x + 9 - k = 0$$

① -7

② -2

③ 7

④ 17

⑤ 25

해설

중근을 가질 때 판별식 $D = 0$

$$D = (-8)^2 - 4(9 - k) = 0$$

$$\therefore k = -7$$

6. 이차방정식 $x^2 + 5x + 2 - k = 0$ 의 해가 없도록 하는 k 값의 범위는?

① $k \geq -\frac{17}{4}$

② $k > -\frac{17}{4}$

③ $k = -\frac{17}{4}$

④ $k < -\frac{17}{4}$

⑤ $k \leq -\frac{17}{4}$

해설

$$D = 5^2 - 4(2 - k) = 25 - 8 + 4k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{17}{4}$$

7. 이차방정식 $x^2 - (k + 2)x + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때의 k 의 값이 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근일 때, $a + b$ 의 값은?

① -4

② -8

③ -2

④ 4

⑤ 8

해설

이차방정식이 중근을 가지려면 $D = 0$

$$(k + 2)^2 - 16 = 0 \quad \therefore k = 2, -6$$

두 근이 2와 -6인 이차방정식은

$$(x - 2)(x + 6) = 0, \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\therefore a = 4, \quad b = -12$$

$$\therefore a + b = 4 + (-12) = -8$$

8. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 - k = 0$ 이 서로 다른 두 근을 갖도록 하는 k 의 값의 개수는?

-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 7 개

해설

$$D = 3^2 - 4(1 - k) > 0$$

$$9 - 4 + 4k > 0, k > -\frac{5}{4}$$

$$\therefore k = -1, 0, 1, 3, 4$$

$\therefore$ 5 개

9. 다음은 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$ ($a \neq 0$)을 푸는 과정이다. ① ~ ⑤에 들어갈 식이 바르지 못한 것은? (단, $b^2 - ac \geq 0$)

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \textcircled{1} = -\frac{c}{a} + \textcircled{1}$$

$$(x + \textcircled{2})^2 = \textcircled{3}$$

$$x = \textcircled{4} \pm \textcircled{5}$$

① $\frac{b^2}{a^2}$

④ $-\frac{b}{a}$

② $\frac{b}{a}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a^2}$

③ $\frac{b^2 - ac}{a^2}$

해설

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

양변을 a 로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

양변에 $\frac{b^2}{a^2}$ 을 더하면

$$x^2 + \frac{2b}{a}x + \frac{b^2}{a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$

$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x = -\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$\therefore$ ⑤가 잘못 되었다.

10. 근의 공식을 이용하여 이차방정식 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 양의 근을 구하면?

① $2 + \sqrt{7}$

② $2 \pm \sqrt{7}$

③ $2 - \sqrt{7}$

④ $-2 + \sqrt{7}$

⑤ $-2 \pm \sqrt{7}$

해설

근의 공식(짝수 공식)으로 풀면

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 + 3}}{1} = 2 \pm \sqrt{7}$$

따라서 양의 해는 $2 + \sqrt{7}$ 이다.

11. 이차방정식 $0.2x^2 - 0.3x - 1 = 0$ 의 두 근 중에서 큰 근을 k 라고 할 때, k 보다 크지 않은 최대의 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$0.2x^2 - 0.3x - 1 = 0$ 의 양변에 10 을 곱하면

$$2x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4}$$

따라서 $k = \frac{3 + \sqrt{89}}{4}$ 이므로 최대 정수는 3 이다.

12. 이차방정식 $3x^2 - 16x - ax + 4a + 15 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

▷ 정답 : $a = 10$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-4) + 3x^2 - 16x + 15 = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3x^2 - 16x + 15}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(3x-4) - 1}{x-4} \\ &= 3x - 4 - \frac{1}{x-4} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x-4 = \pm 1$ 이다.

$x = 3$ 또는 $x = 5$ 이므로

(i) $x = 3$ 일 때, $a = 6$

(ii) $x = 5$ 일 때, $a = 10$ 이다.

13. 두 실수 x, y 에 대하여 $x = \frac{-m + \sqrt{2}}{2}$, $y = 3 + \sqrt{2}$ 일 때, $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 24 = 0$ 이 성립하는 m 의 값들의 합은?

① -3

② -4

③ 5

④ -5

⑤ 6

해설

$(2x - y)^2 + 2(2x - y) - 24 = 0$ 에서 $2x - y = t$ 로 치환하면

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$(t + 6)(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = -6$$

i) $t = 4$ 일 때

$$2x - y = -m + \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2}) = 4$$

$$m = -7$$

ii) $t = -6$ 일 때

$$2x - y = -m + \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2}) = -6$$

$$m = 3$$

따라서 모든 m 의 값의 합은 $(-7) + 3 = -4$ 이다.

14. 이차방정식 $x^2 - 8x - 3 + a = 0$ 가 중근을 갖도록 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$$\frac{D}{4} = 16 - (-3 + a) = 0$$

$$\therefore a = 19$$

15. 이차방정식 $x^2 + 6x + k + 1 = 0$ 이 중근을 가질 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 9 - (k + 1) = 0$$

$$9 - k - 1 = 0$$

$$\therefore k = 8$$

16. 다음은 이차방정식 $x^2 - 6x + a = 0$ 에 대한 설명이다. 옳은 것은 몇 개인가?

- ㉠ $a = 0$ 이면 중근을 갖는다.
- ㉡ $a = 9$ 이면 근은 없다.
- ㉢ $a \leq 9$ 이면 적어도 하나의 근을 갖는다.
- ㉣ $a > 9$ 이면 근이 2개이다.
- ㉤ a 의 값에 관계없이 두 근을 갖는다.

① 5개

② 4개

③ 3개

④ 2개

⑤ 1개

해설

$D = 36 - 4a$ 이므로

- ㉠ $a = 0$ 이면 $D > 0$ 이므로 두 근을 갖는다. (거짓)
- ㉡ $a = 9$ 이면 $D = 0$ 이므로 중근을 갖는다.(거짓)
- ㉢ $a \leq 9$ 이면 $D \geq 0$ 이므로 적어도 하나의 근을 갖는다.(참)
- ㉣ $a > 9$ 이면 $D < 0$ 이므로 근은 없다.(거짓)
- ㉤ $a > 9$ 일 때 두 근을 갖는다.(거짓)

17. 연속하는 세 자연수가 있다. 가장 큰 수의 제곱이 다른 두 수의 제곱의 합보다 3만큼 더 클 때, 이 세 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

연속하는 세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라 하면

$$(x+1)^2 = (x-1)^2 + x^2 + 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$x-1, x, x+1$ 은 자연수이므로 $x=3$

$$\therefore 2+3+4=9$$

18. 이차방정식 $\{1 + (a + b)^2\}x^2 - 2(1 - a - b)x + 2 = 0$ 의 근이 실수일 때, 실수 $a + b + 2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

근이 실수이면 $D \geq 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (1 - a - b)^2 - 2\{1 + (a + b)^2\} \geq 0$$

$$(a + b)^2 + 2(a + b) + 1 \leq 0$$

$$\therefore (a + b + 1)^2 \leq 0$$

a, b 는 실수이므로 $a + b + 1 = 0$

$$\therefore a + b + 2 = 1$$

19. 이차방정식 $x^2 + (-m + 3)x + 24 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?

- ㉠ 주어진 이차방정식의 해는 4, 6밖에 없다.
㉡ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha < 0$ 이면 $m > 0$ 이다.
㉢ 작은 근을 α 라 하고 $\alpha > 0$ 이면 $m = 13$ 이다.
㉤ 주어진 식을 만족하는 모든 m 의 값의 합은 6이다.

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

두 근을 $\alpha, \alpha + 2$ 라 하면

$$\alpha(\alpha + 2) = 24 \text{에서 } \alpha = 4 \text{ 또는 } -6$$

㉠ $\{4, 6\}$ 또는 $\{-6, -4\}$

㉡ $\alpha < 0$ 이면 두 근은 $-6, -4$ 이고 $m - 3 = -6 - 4 = -10$
 $m = -7$ 이므로 $m < 0$ 이다.

㉢ $\alpha > 0$ 이면 두 근은 4, 6이고
 $m - 3 = 4 + 6 = 10$

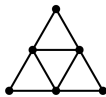
$$\therefore m = 13$$

㉤ $m = -7, 13$ 이므로 모든 m 의 값의 합은 6이다

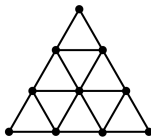
20. 그림과 같이 꼭짓점을 점으로 표현한 삼각형을 규칙적으로 이어 붙여서 n 번째 순서의 삼각형을 만드는데 사용한 점의 개수는 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 개일 때, 점의 개수가 21 개인 삼각형의 순서는?



1번째



2번째



3번째

- ① 5 번째 ② 6 번째 ③ 7 번째
④ 8 번째 ⑤ 9 번째

해설

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 21 \text{ 이므로}$$

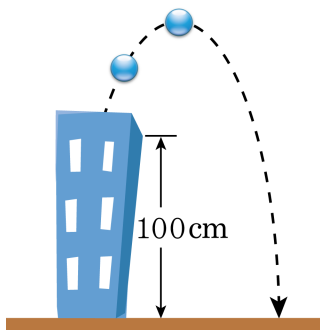
$$n^2 + 3n - 40 = 0$$

$$(n-5)(n+8) = 0$$

$$n > 0 \text{ 이므로 } n = 5$$

따라서 점의 개수가 21 개인 삼각형의 순서는 5 번째이다.

21. 지면으로부터 100m 되는 건물의 높이에서 초속 40m 로 위에 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 40t + 100$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 지면으로부터 160m 인 지점을 지날 때부터 최고점에 도달하기까지 걸리는 시간과 최고점의 높이는?



- ① 2 초, 170m ② 3 초, 175m ③ 2 초, 175m
 ④ 3 초, 180m ⑤ 2 초, 180m

해설

$$-5t^2 + 40t + 100 = 160$$

$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t - 2)(t - 6) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 6$$

물체가 올라갔다 떨어지는 것이므로 처음으로 160m 를 지나는 시간부터 최고점까지

올라가는데 걸리는 시간은 두 시간 간격사이의 절반이다.

$$t = \frac{6 - 2}{2} = 2(\text{초})$$

최고점까지의 거리는 물체가 4 초만큼 움직인 거리이므로

$$\begin{aligned} h &= -5t^2 + 40t + 100 \\ &= -5(4^2) + 40 \times 4 + 100 \\ &= 180(\text{m}) \end{aligned}$$

23. 세 이차방정식 $px^2+qx+1=0$, $qx^2+2(p+1)x+q=0$, $px^2+2qx+r=0$ 의 실근의 개수는 각각 a, b, c 이다. $a^2+b^2+c^2=2a+2b+2c-3$ 일 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a^2+b^2+c^2=2a+2b+2c-3$ 에서

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$ 이므로 $a=1, b=1, c=1$

즉, $px^2+qx+1=0$, $qx^2+2(p+1)x+q=0$, $px^2+2qx+r=0$

이 모두 중근을 가지므로

$$D=q^2-4p=0, q^2=4p \cdots \textcircled{㉠}$$

$$D=(p+1)^2-q^2=0, p^2+2p+1-q^2=0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$D=q^2-pr=0, q^2=pr \cdots \textcircled{㉢}$$

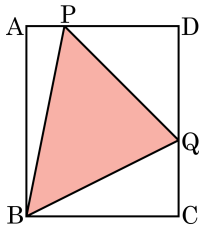
㉠과 ㉡에 의하여

$$p^2+2p+1-4p=0, (p-1)^2=0$$

$$\therefore p=1, q=\pm 2, r=4$$

$$\therefore p^2+q^2+r^2=1+4+16=21$$

24. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 에서 점 P 는 선분 AD 위에 있고, 점 Q 는 선분 CD 위에 있다. 삼각형 ABP, PDQ, BCQ 의 넓이가 각각 2.5, 4.5, 4 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\overline{AD} = x$, $\overline{AB} = y$ 라 하면

$$\triangle ABP = \frac{1}{2}y \times \overline{AP} = 2.5 \quad \therefore \overline{AP} = \frac{5}{y}$$

$$\triangle BCQ = \frac{1}{2}x \times \overline{QC} = 4 \quad \therefore \overline{QC} = \frac{8}{x}$$

$$\text{따라서 } \triangle PQD = \frac{1}{2} \left(x - \frac{5}{y} \right) \left(y - \frac{8}{x} \right) = 4.5$$

$$\left(\frac{xy - 5}{y} \right) \left(\frac{xy - 8}{x} \right) = 9$$

$$(xy - 5)(xy - 8) = 9xy$$

$$(xy)^2 - 22xy + 40 = 0$$

$$(xy - 2)(xy - 20) = 0$$

$$\therefore xy = 2 \text{ 또는 } xy = 20$$

그런데 $xy > 11$ 이므로 $xy = 20$

$$\therefore \triangle PBQ = 20 - 11 = 9$$

25. 어떤 원의 반지름의 길이를 3 cm 만큼 늘였더니, 그 넓이는 처음 원의 넓이의 4 배가 되었다. 이때, 처음 원의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 3cm

해설

처음 원의 반지름 : r

늘인 원의 반지름 : $r + 3$

$$\pi(r + 3)^2 = 4\pi r^2$$

$$r^2 + 6r + 9 = 4r^2$$

$$3r^2 - 6r - 9 = 0$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$(r - 3)(r + 1) = 0$$

$$\therefore r = 3 \text{ cm } (r > 0 \text{ 이므로})$$