

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$x^4 = 16$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
 $\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$
 $\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

2. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

3. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

4. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

5. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

- (가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

- ① $\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, -\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

6. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

7. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

8. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p, y=q$ 또는 $x=r, y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy-y^2=6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=2y+1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ②에 대입하여 정리하면

$$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$$

$$\therefore y=2, -3$$

$y=2, y=-3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x=5, x=-5$$

$$\therefore x=5, y=2 \text{ 또는 } x=-5, y=-3$$

10. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

11. 다음은 a 가 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근일 때, $a^2 - 2$ 도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

a 는 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로 (가)
 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면
 $f(a^2 - 2) = (\text{나}) = (\text{다}) = (\text{라}) = (\text{마}) = 0$
따라서, $a^2 - 2$ 도 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가) $a^3 - 3a + 1 = 0$
- ② (나) $(a^2 - 2)^3 - 3(a^2 - 2) + 1$
- ③ (다) $a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1$
- ④ (라) $(a^3 - 3a + 1)(a^3 - 3a - 1)$
- ⑤ (마) $0 \cdot 2$

해설

a 는 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로 $a^3 - 3a + 1 = 0$
 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면 $f(a^2 - 2) = (a^2 - 2)^3 - 3(a^2 - 2) + 1$
 $= a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1 = (a^3 - 3a + 1)(a^3 - 3a - 1) = 0 \cdot (-2) = 0$
따라서 $a^2 - 2$ 도 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이다.

12. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나) 를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
(나) 다음 날은 집에서 어제 걸어난 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 1680$

② (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 3360$

③ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

④ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 3360$

⑤ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m
(가) $\frac{x}{60} + 3 + \frac{y}{500} = 10$, $\frac{x}{60} + \frac{y}{500} = 7$
 $\therefore 25x + 3y = 10500$
(나) $\frac{x+y}{60} = 28$
 $\therefore x + y = 1680$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 1개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } x^2 - (y - 3)^2 = 0$$

$$(x + y - 3)(x - y + 3) = 0$$

$$y = x + 3 \text{ 또는 } y = -x + 3$$

i) $y = -x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 이 때, } y = 1$$

ii) $y = x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{이 때, } y = 2 \pm \sqrt{3}i$$

i), ii)에서 실수해의 순서쌍은 (2, 1)이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$ 을 풀면 $x = \alpha, y = \beta$

또는 $x = \gamma, y = \delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 에서 $x - y = -2$, 즉 $y = x + 2$

$\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -1, -2$$

$$\therefore x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = -2, y = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 6$$

15. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore u = \pm 7, v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x + y = -7 & \cdots \textcircled{\text{A}} \\ xy = 12 & \cdots \textcircled{\text{B}} \end{cases}$$

(i) $\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = 3, y = 4$ 또는 $x = 4, y = 3$

(ii) $\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 에서 x, y 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이

므로 $x = -3, y = -4$ 또는 $x = -4, y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

16. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$ 를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z 의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 8개 ⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$ 를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$

(i) $z = 1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$$xy = 1, x = y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$$

(ii) $z = -1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면

$$xy = -1, x = -y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z) 는 모두 4개이다.

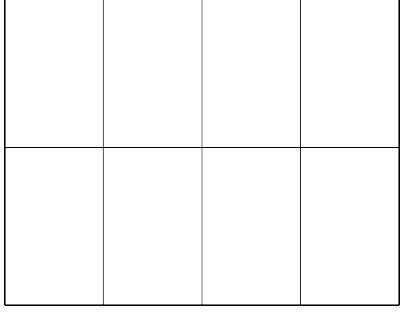
17. a, b 는 실수라 한다. x 에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2 + a^2x + b^2 - 2a = 0$, $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2 + a^2\alpha + b^2 - 2a = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면 $(a^2 + 2a)\alpha - (a^2 + 2a) = 0$
 $\therefore (a^2 + 2a)(\alpha - 1) = 0$
 $\therefore a^2 + 2a = 0$ 또는 $\alpha = 1$
그런데 $a^2 + 2a = 0$ 일 때는 $a^2 = -2a$ 이므로
두 방정식이 일치하게 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
 $\therefore \alpha = 1$
 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $1 + a^2 + b^2 - 2a = 0$
 $\therefore (a - 1)^2 + b^2 = 0$
 a, b 는 실수이므로 $a - 1 = 0, b = 0$
 $\therefore a + b = 1$

18. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 80 m^2 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)



- ① 16 m ② 17 m ③ 18 m ④ 19 m ⑤ 20 m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$3x + 5y = 70$$

$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10$, $y = 8$

$$\therefore \text{가로} + \text{세로} = 18$$

19. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2a \\ xy=a \end{cases}$ 를 만족하는 순서쌍 (x,y) 가 한 개 뿐일 때, 양의 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{cases} x+y=2a \cdots ① \\ xy=a \cdots ② \end{cases}$$

①에서 $y = -x + 2a$ 를 ②에 대입하면

$$x(-x + 2a) = a$$

$\therefore -x^2 + 2ax = a$ 즉 $x^2 - 2ax + a = 0$ 이 한 개의

실근을 가져야 하므로 $D/4 = a^2 - a = 0$

$\therefore a = 0$ 또는 1 그런데

a 는 양의실수 이므로

$$a = 1$$