1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

2. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② −4　③ 8　④ −8　⑤ −16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

3. 방정식 $x^3-x^2+ax-1=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a=3, 1\pm\sqrt{2}$
② $a=-3, 1\pm\sqrt{2}$
③ $a=3, 1\pm\sqrt{3}$
④ $a=-3, 1\pm\sqrt{3}$
⑤ $a=-1, 1\pm\sqrt{2}$

해설

$x=-1$이 근이므로 $-1-1-a-1=0$에서 $a=-3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $=(x+1)(x^2-2x-1)=0$
$x^2-2x-1=0$의 근은 $1\pm\sqrt{2}$
$\therefore a=-3$, 나머지 근은 $1\pm\sqrt{2}$

4. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + ax + b = 0$의 두 근이 -3, $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a = (1 - \sqrt{2})\left(1 + \sqrt{2}\right) + (-3)\left(1 - \sqrt{2}\right) + (-3)\left(1 + \sqrt{2}\right) = -7$
$b = -\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)(-3) = -3$
$\therefore\ a + b = -10$

5. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
∴ ①이 조건에 맞다

6. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2 ② $-1 + \sqrt{2}$, -3 ③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로

$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\quad \alpha = 3$

$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

7. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4-4x^2-12,\quad x^2=Y$ 라 하자

$\Rightarrow\quad Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$

$Y=-2$ 또는 $Y=6$

$\Rightarrow\quad x^2=-2,\quad x^2=6$

$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}i,\quad x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ x^4-4x^2-12$

$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

8. 삼차방정식 $x^3 + 27 = 0$ 의 모든 근의 합은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^3 + 3^3 = 0,\ (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$

$\therefore x = -3,\ \dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3 + \dfrac{3 + 3\sqrt{3}i}{2} + \dfrac{3 - 3\sqrt{3}i}{2} = 0$

해설

$x^3 + 27 = 0$ 에서 x^2 의 계수가 0 이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

9. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

10. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

11. 방정식 $x^6-1=0$의 해가 <u>아닌</u> 것은?

① -1 ② 1 ③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x=-1,\ 1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

12. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　② $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　③ $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$
④ -1　⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
  &   & 1 & 1 & 2 \\
\hline
  & 1 & 1 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

13. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$ ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$ ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

14. $x(x-1)(x+1)-6=0$의 세근을 구하면?

① $2,\ -1,\ -3$　② $-2,\ 1,\ -3$　③ $2,\ 1,\ -3$

④ $-2,\ -1\pm\sqrt{2}i$　⑤ $2,\ -1\pm\sqrt{2}i$

해설

준식$= x(x^2-1)-6 = x^3-x-6=0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore\ x=2, -1\pm\sqrt{2}i$

15. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$ ② $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$ ④ $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2,\quad x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

16. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$ 공통근 : $x=1$

17. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

18. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$

$\therefore\ k=3$

19. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

20. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$

$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

21. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma = 0$이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$이 된다.

22. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{c-b}{a}$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\dfrac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \dfrac{c-b}{a}=\dfrac{c}{a}+\left(-\dfrac{b}{a}\right)=1+4=5$

23. a, b가 실수일 때, 방정식 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 이면 $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$

$\therefore\ 2+\alpha=-a \cdots$ ①

$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+(1+i)\alpha=-4$

$\therefore\ 2+2\alpha=-4 \cdots$ ②

$(1+i)(1-i)\alpha=-b$

$\therefore\ 2\alpha=-b \cdots$ ③

①, ②, ③에서 $\alpha=-3,\ a=1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=7$

24. 삼차방정식 $2x^3+px^2+qx-5=0$ 의 한 근이 $1-2i$ 일 때 $p+q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

① 7　② -7　③ 6　④ -6　⑤ 11

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 두 근을 $1+2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱:

$(1-2i)(1+2i)\alpha = \frac{5}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{1}{2}$

세 근의 합: $-\frac{p}{2} = (1-2i)+(1+2i)+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore\ p = -5$

두근끼리 곱의 합 : $\frac{q}{2} = (1-2i)(1+2i)+(1-2i+1+2i)\cdot\frac{1}{2} = 6$

$\therefore\ q = 12$

$\therefore\ p+q = 7$

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 한 근은 $1+2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2-2x+5=0$

나머지 일차식을 $2x+a$ 라고 하면

$2x^3+px^2+qx-5=(2x+a)(x^2-2x+5)$ 에서

$a=-1$ 이므로 대입하여 정리하면

$p=-5,\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

25. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, \alpha$
세 근의 곱 : $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$
$\alpha(1+3)=-4$, $\alpha=-1$
세 근 : $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -1$
세 근의 합 : $1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i-1=-a$
$a=-1$
$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$
$+(-1)(1+\sqrt{3}i)$
$=1+3-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i=2$
$\therefore\ a+b=-1+2=1$