1. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1　　② -1

③ $\sqrt{-1}$　　④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

2. 임의의 두 복소수 $a,\ b$ 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$
④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (\mathrm{Z} + \overline{Z}),\ Z = 2+i,\ \overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

3. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$ 일 때, a^2+b^2 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$
$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$
$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$
$=a+bi$
따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$
$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

4. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1　　② 1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 2

해설

복소수 z를 $a + bi$ ($a,\ b$는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로
$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

5. 복소수 $(1+i)x^2-(2+i)x-3-2i$를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x의 값은?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

(준식)$= x^2-2x-3+(x^2-x-2)i$
이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로
$x^2-2x-3=0\cdots$㉠, $x^2-x-2\neq 0\cdots$㉡
㉠에서 $x=3,\ x=-1$
이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore\ x=3$

6. $(3+4i)^5(15-20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3+4i)^5(3-4i)^5 \\ &= 5^5\{(3+4i)(3-4i)\}^5 \\ &= 5^5(5^2)^5 \\ &= 5^{15}\end{aligned}$$

7. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{29} + i^{30}$ 을 계산하면?

① $i - 1$ ② $1 - 2i$ ③ $3i - 1$ ④ $2 - 3i$ ⑤ $i + 3$

해설

$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

$$\begin{aligned} \therefore i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{29} + i^{30} &= i^{29} + i^{30} \\ &= i + i^2 \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

8. n이 양의 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ -2 ⑤ 100

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{n}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{n}=i^n$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{n}=\left(-\frac{2i}{2}\right)^{n}=(-i)^n$$

$\therefore$ (준식)$= i^n+(-i)^n=0$

9. $\alpha = 1+i,\ \beta = 1-i$ 일 때, $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 2$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8-12}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

10. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다. ㉡ $z\bar{z} > 0$

㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다. ㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi,\ (a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $z+\bar{z}=2a$(실수)

㉡ $z\bar{z}=a^2+b^2>0$

㉢ $z-\bar{z}=2bi$, $b=0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.
$ex)\ z=3,\ \bar{z}=3,\ z-\bar{z}=3-3=0$

㉣ $z^2+\bar{z}^2=2(a^2-b^2)$ → 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

11. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, 등식 $(1-i)\bar{z}+2iz=3-i$를 만족시키는 z를 구하면?

① $3-2i$　② $-3+i$　③ $3+i$
④ $-3-2i$　⑤ $3-i$

해설

복소수 $z=x+yi(x,\ y$ 는 실수$)$ 라 놓으면
$\bar{z}=x-yi$
따라서, 주어진 식은
$(1-i)(x-yi)+2i(x+yi)=3-i$
$x-yi-xi-y+2xi-2y=3-i$
$(x-3y)+(x-y)i=3-i$
복소수의 상등에 의하여 $x-3y=3$, $x-y=-1$
$\therefore\ x=-3,\ y=-2$
$\therefore\ z=-3-2i$

12. $x=\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2-2x$ 의 값은?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ i

해설

$x=\frac{1-\sqrt{2}i}{3}$, $3x-1=-\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면
$9x^2-6x+1=-2$, $9x^2-6x=-3$
양변을 3 으로 나누면
$\therefore\ 3x^2-2x=-1$

13. $z=\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때 z^5+3z 를 간단히 하면?

① $1+\sqrt{3}i$ ② $2+\sqrt{3}i$ ③ $3+\sqrt{3}i$
④ $2+2\sqrt{3}i$ ⑤ $3+3\sqrt{3}i$

해설

$z=\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$ 에서 $z^2-z+1=0$ $\therefore$ $z^3=-1$

$z^5+3z=-z^2+3z=-(z-1)+3z=1+2z$

$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 이므로 $1+2z=2+\sqrt{3}i$

14. $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$　③ 0
④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$　⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$$w^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$

$$=\dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$w^3=w\cdot w^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-3i^2}{4}=1$$

$1+w+w^2=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=0$ 이므로

$$\therefore 1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}$$
$$=1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots$$
$$+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)$$
$$=0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w)=(w^3)^{33}\cdot(1+w)$$
$$=1+w=1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

15. 실수 a, b 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{a+1}}$ 이 성립할 때, $|a+1| + \sqrt{(b-1)^2}$ 을 간단히 하면?

① $a+b$　　② $a-b$　　③ $b-a$

④ $a-b+2$　　⑤ $b-a-2$

해설

$\dfrac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{a+1}} = -\sqrt{\dfrac{b-1}{a+1}}$ 이므로

$a+1<0$, $b-1 \geq 0$

$$\begin{aligned} |a+1| + \sqrt{(b-1)^2} &= |a+1| + |b-1| \\ &= -(a+1) + (b-1) \\ &= -a-1+b-1 \\ &= b-a-2 \end{aligned}$$