

1. 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ {전자레인지, 전화기, 화분, 침대, 이불} = { $x \mid x$ 는 전자제품}

㉡ {1, 2, 3, 4} = { $x \mid x$ 는 자연수를 4로 나누었을 때, 나머지}

㉢ {매화, 난초, 국화, 소나무} = { $x \mid x$ 는 사군자의 이름}

㉣ {0과 1 사이의 분수} = $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

㉤ {1, 3, 17, 51} = { $x \mid x$ 는 51의 약수}

㉥ {징, 장구, 북, 팽과리} = { $x \mid x$ 는 사물놀이에 쓰이는 악기}

① ㉡, ㉤

② ㉢, ㉣, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉥

⑤ ㉣, ㉥

해설

㉡ { $x \mid x$ 는 자연수를 4로 나누었을 때, 나머지}는 {0, 1, 2, 3}이다.

㉣ {0과 1 사이의 분수}는 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right\}$ 이다.

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \subset B, B \subset A$ 이고, $A = \{x|x \text{는 } 28 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다.

$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ 이고,
 $n(A) = 6, n(B) = 6$ 이다.

따라서, $n(A) + n(B) = 12$ 이다.

4. 집합의 연산 법칙을 이용하여 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B)$ 를 간단히 하면?

① $(A^c \cap B^c)$

② A^c

③ B^c

④ B

⑤ U

해설

$$\begin{aligned}(A \cup B)^c \cup (A^c \cap B) &= (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = A^c \cap (B^c \cup B) \\ &= A^c \cap U = A^c\end{aligned}$$

5. N 중학교 1 학년 학생 100 명을 대상으로 설문 조사를 한 결과가 다음과 같을 때, 컴퓨터와 게임기를 모두 가지고 있는 학생은 몇 명인가?

㉠ 컴퓨터가 있는 학생 수 : 47 명

㉡ 게임기가 있는 학생 수 : 39 명

㉢ 컴퓨터 또는 게임기가 있는 학생 수 : 72 명

① 11 명

② 12 명

③ 13 명

④ 14 명

⑤ 15 명

해설

컴퓨터가 있는 학생의 집합을 A , 게임기가 있는 학생의 집합을 B 라 하자.

$$\begin{aligned}n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 47 + 39 - 72 \\ &= 86 - 72 = 14(\text{명})\end{aligned}$$

6. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 두 조건 $p : x^2 = 3x$, $q : x \geq 2$ 에 대하여 조건 ' p 이고 $\sim q$ '를 만족하는 집합은?

① $\{0\}$

② $\{1\}$

③ $\{3\}$

④ $\{0, 1\}$

⑤ $\{3, 5\}$

해설

p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{0, 3\}, Q = \{2, 3, 4, 5\}$$

' p 이고 $\sim q$ ' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q^c$

$$\therefore P \cap Q^c = P - Q = \{0\}$$

7. 조건 p 를 만족하는 집합을 P 라 하고, 조건 q 를 만족하는 집합을 Q 라 하자. 명제 ' p 이면 q 이다.' 가 거짓일 때, 반례의 집합은?

① P

② Q

③ $P - Q$

④ P^c

⑤ Q^c

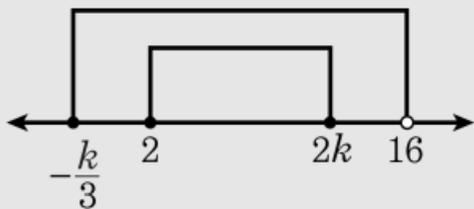
해설

만약 ' p 이면 q 이다.' 가 참이라면 P 의 모든 원소는 Q 의 원소이어야 한다. 하지만 ' p 이면 q 이다' 가 거짓이므로 P 의 원소이지만 Q 의 원소가 아닌 것이 반례로 적당하다.

8. 두 조건 $p : 2 \leq x \leq 2k$, $q : -\frac{k}{3} \leq x < 16$ 에 대하여 ‘ p 이면 q 이다.’가 참이 되도록 하는 정수 k 의 개수는? (단, $k \geq 1$)

- ① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설



$$-\frac{k}{3} \leq 2 \rightarrow k \geq -6, \quad 2k < 16 \rightarrow k < 8, \quad 1 \leq k < 8 \text{ 이므로}$$

정수 k 의 개수는 7개

9. 조건 p, q 가 $p : x < 1$ 또는 $x \geq 2$, $q : \frac{a}{2} < x \leq 3a$ 일 때, ‘ $\sim p$ 이면 q 이다.’ 가 참이 되기 위한 a 의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \leq 2$

② $\frac{2}{3} \leq a < 2$

③ $1 \leq a < 2$

④ $1 < a \leq 2$

⑤ $\frac{2}{3} < a < 2$

해설

명제의 대우는 ‘ $\sim q$ 이면 p 이다’

$\sim q : x \leq \frac{a}{2}$ 또는 $x > 3a$, $p : x < 1$ 또는 $x \geq 2$ 이므로 명제의

대우가 참이 되려면 $\frac{a}{2} < 1$ 이고 $3a \geq 2$ 가 되어야 한다.

$a < 2$ 이고 $a \geq \frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{2}{3} \leq a < 2$ 이다.

10. 두 조건 $p: -5 \leq x < 6$, $q: 2a - 3 < x \leq a + 2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: $a = \underline{5}$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면

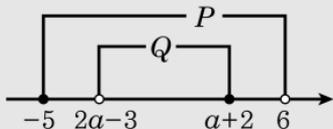
$$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\},$$

$$Q = \{x \mid 2a - 3 < x \leq a + 2\}$$

이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$$\therefore Q \subset P$$

따라서, 다음 수직선에서



$$2a - 3 \geq -5 \text{ 이고 } a + 2 < 6$$

$$2a \geq -2 \text{ 이고 } a < 4$$

$$\therefore -1 \leq a < 4$$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

11. $a > 0, b > 0$ 일 때, 부등식 $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq k$ 가 항상 성립하는 k 의 범위를 구하면 ?

① $k \geq 9$

② $k \leq 9$

③ $k \geq 4$

④ $k \leq 4$

⑤ $k \leq -4$

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 1 + 4 + \frac{4}{ab} = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

그런데, a, b 가 양수이므로 $ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$

$$\therefore ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5$$

$$\therefore k \leq 9$$

12. 함수 f 가 임의의 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$ 일 때, $f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}f(8) &= f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) \\ &= f(2 \cdot 2) + f(2) \\ &= f(2) + f(2) + f(2) \\ &= 3f(2) = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2) &= f\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2 \cdot 2) + f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= f(2) + f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2) = -1$$

$$\text{따라서 } f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 + (-1) = 2$$

13. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 27

② 30

③ 33

④ 36

⑤ 39

해설

집합 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$a = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$$b = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\therefore a + b = 27 + 6 = 33$$

14. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개

② 5 개

③ 7 개

④ 9 개

⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면

$$x = -1 \text{ 일 때, } -f(-1) = k$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } 0 \cdot f(0) = k$$

$$\therefore k = 0$$

$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서

$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.

따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가

상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는

원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는

$-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지

$$\therefore 1 \times 5 \times 1 = 5 \text{ (개)}$$

15. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = ax + b|x|$ (a, b 는 상수)가 역함수를 가질 조건은?

① $a^2 - b^2 < 0$

② $a^2 - b^2 > 0$

③ $a + b > 0$

④ $a - b > 0$

⑤ $a - b < 0$

해설

$$f(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면

$f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 하므로

두 직선 $y = (a+b)x, y = (a-b)x$ 의 기울기의 부호가 같아야 한다.

$$\therefore (a+b)(a-b) > 0, \quad a^2 - b^2 > 0$$

16. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

㉠ $X \subset A$

㉡ $\{3, 5\} \subset X$

㉢ $n(X) \leq 5$

① 12 개

② 13 개

③ 14 개

④ 15 개

⑤ 16 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 에서 $\{3, 5\}$ 를 반드시 포함하며 원소의 개수가 5 개이하인 부분집합이다.

원소의 개수가 2개인 부분집합 : $\{3, 5\}$

원소의 개수가 3개인 부분집합 : $\{1, 3, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 5, 11\}$

원소의 개수가 4개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 9\}, \{1, 3, 5, 11\}, \{3, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 9, 11\}$

원소의 개수가 5개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{1, 3, 5, 7, 11\}, \{1, 3, 5, 9, 11\}, \{3, 5, 7, 9, 11\}$

17. 세 집합 $A = \{x \mid x = 2 \times n - 1, n \text{은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 20미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 18의 약수}\}$ 에 대하여 $B \cup (C \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 87

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ 즉 홀수의 집합과 일치한다.

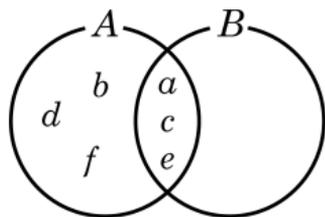
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이다.

먼저 C 와 A 의 교집합을 구하면 $\{1, 3, 9\}$ 이다.

$B \cup (C \cap A) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

따라서 모든 원소의 합을 구하면 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 17 + 19 = 87$

18. 다음 벤 다이어그램에서 $A = \{a, b, c, d, e, f\}$,
 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 가 성립할 때, 다음 중 집합
 B 가 될 수 있는 것은?



- ① $\{a, b, c, d, e\}$ ② $\{a, c, d, e, g\}$ ③ $\{b, d, e, f, g\}$
 ④ $\{a, c, d, e, g\}$ ⑤ $\{a, c, e, g, h\}$

해설

집합 B 는 반드시 $A \cap B = \{a, c, e\}$ 을 포함하여야 한다.
 그러나 A 집합에만 존재하는 원소 b, d, f 는 들어갈 수 없다.

- ① b, d 가 포함되어서 옳지 않다.
 ② d 가 포함되어서 옳지 않다.
 ③ b, d, f 가 포함되어서 옳지 않다.
 ④ d 가 포함되어서 옳지 않다.

19. 두 집합 $A = \{a, 5, a+6\}$, $B = \{x|x\text{는 } 14\text{의 약수}\}$ 에서 $A \cap B = \{1, 7\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$1 \in A$ 이므로 $a = 1$ 또는 $a + 6 = 1$ 이다.

(i) $a = 1$ 이면 $A = \{1, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1, 7\}$ 이다.

$\therefore a = 1$

(ii) $a + 6 = 1$ 즉, $a = -5$ 이면 $A = \{-5, 1, 5\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

그러므로 $a = 1$ 이다.

20. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개

② 6개

③ 8개

④ 12개

⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.

$$\therefore n(X) = 2^{5-2} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 연산 과정 중 처음으로 잘못된 곳을 찾아라.

$$B^c - A^c = B^c \cap (A^c)^c = B^c \cap A = B - A = (A \cap B)$$

Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

▶ 답 :

▶ 정답 : Ⓒ

해설

$B^c \cap A = A - B$ 이다. 따라서 처음으로 잘못된 곳은 Ⓒ $B - A$ 이다.

22. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x - 2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는 $a > 0$

② $-1 \leq a \leq 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \geq 1$

해설

(i) $x \geq 2$ 일 때 $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a + 1)x + 1$

(ii) $x < 2$ 일 때 $f(x) = ax - (x - 2) + 3 = (a - 1)x + 5$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서, $(a + 1)(a - 1) > 0$ 이므로

$a < -1$ 또는 $a > 1$

23. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(3g(x)+4x+6) = x$ 가 성립한다. 이 때, $f(3) + g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$$f(3g(x) + 4x + 6) = x \text{ 에서}$$

$$f^{-1}(x) = 3g(x) + 4x + 6$$

이때, $f^{-1}(x) = g(x)$ 이므로

$$g(x) = 3g(x) + 4x + 6$$

$$\therefore g(x) = -2x - 3$$

한 편, $y = g(x)$ 로 놓고 $y = -2x - 3$ 을
 x 에 대하여 정리하면 $2x = -y - 3$ 에서

$$x = -\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

여기서 x, y 를 서로 바꾸면

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(3) + g(3) = -3 - 9 = -12$$

24. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

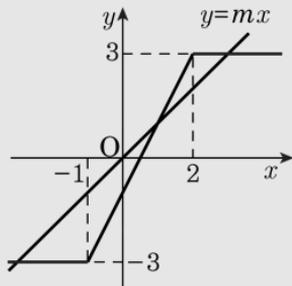
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



25. 집합 X, Y 에 대하여 연산 \star 를 $X\star Y = (X\cup Y) - (X\cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A\cup B\cup C) = 45$, $n(A\star B) = 18$, $n(B\star C) = 22$, $n(C\star A) = 24$ 를 만족할 때, $n(A\cap B\cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10

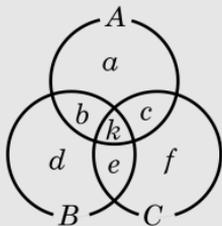
② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설



$$n(A\cap B\cap C) = k$$

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= a + b + c + d + e + f + k \\ &= 45 \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$n(A\star B) = a + c + d + e = 18 \dots \text{㉡}$$

$$n(B\star C) = b + d + c + f = 22 \dots \text{㉢}$$

$$n(C\star A) = a + b + e + f = 24 \dots \text{㉣}$$

$$\text{㉡} + \text{㉢} + \text{㉣} = 2(a + b + c + d + e + f) = 64$$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 32 \dots \text{㉤}$$

$$\text{㉤을 ㉠에 대입하면 } \therefore k = 13$$