

1. 세 점 A(0,0), B(1,0), C(1,2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

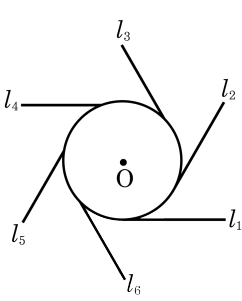
$$\begin{aligned} &P(x, y) \text{ 라 두면} \\ &x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ &= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P는 △ABC의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

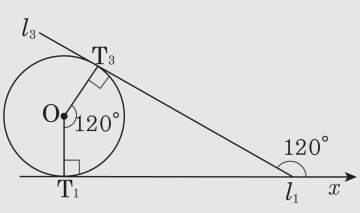
2. 수차 제작을 위해 그림과 같은 설계도를 그리고 있다. $l_1, l_2, \dots, l_6$ 는 원주를 6 등분하는 점에서 원의 접선 방향으로 붙인 날개의 단면이다. l_1 의 기울기가 0 일 때, l_3 의 기울기는?



- ① -3 ② $-\sqrt{3}$ ③ -1
 ④ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

해설

문제의 조건에서 l_1 의 기울기가 0 이므로
 다음 그림과 같이 l_1 을 x 축으로 놓으면,
 l_3 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 120° 이다.
 따라서 구하는 기울기 m 은
 $m = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$



3. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle OAB$ 의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{-2 - (-3)}{4 - 2}(x - 2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow x$ 절편은 8이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore \triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16 \text{ 이다.}$$

4. A (1, 1), B (-2, -3), C ($k, k + 1$)이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \therefore k = 4$$

5. x, y 에 대한 연립방정식 $2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 해를 갖지 않을 때, 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$2x + (a + 2)y - 1 = 0$, $(a - 3)x - 2y + 2 = 0$ 이 평행해야 한다.

따라서 평행할 조건을 구하면,

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \neq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{a-3} = \frac{a+2}{-2} \text{에서}$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -1$$

1) $a = 2$ 일 때,

$$\frac{2}{-1} = \frac{4}{-2} \neq -\frac{1}{2} \therefore \text{평행}$$

2) $a = -1$ 일 때,

$$\frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \therefore \text{일치}$$

따라서, 1), 2)에 의하여 $a = 2$

6. 두 직선 $2x + 3y = 3$, $3x - 2y = -2$ 의 교점을 지나고, 한 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x + y + 1 = 0$ ② $x + y - 1 = 0$ ③ $2x + y - 1 = 0$
④ $2x + y + 1 = 0$ ⑤ $3x + y - 1 = 0$

해설

두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$$

두 직선 $2x + 3y = 3$ 과 $3x - 2y = -2$ 의

교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + 3y - 3 + k(3x - 2y + 2) = 0 \text{ 이고}$$

이 직선이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

대입하여 k 값을 구하면 $k = \frac{1}{5}$ 이다.

$$\text{따라서 } 2x + 3y - 3 + \frac{1}{5}(3x - 2y + 2) = 0$$

$$\therefore x + y - 1 = 0$$

7. 평행한 두 직선 $12x - 5y = 3$, $12x - 5y = 29$ 사이의 거리를 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 12 ⑤ 26

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점을 택한 후 나머지 직선과의 거리를 구하면 된다.

$$12x - 5y = 3 \text{ 의 } \left(0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \frac{|12 \times 0 + \left(-\frac{3}{5}\right) \times (-5) - 29|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{26}{13} = 2$$

8. 직선 $3x + 4y = 0$ 에 평행하고 원점으로부터 거리가 3 인 직선 중 1 사분면을 지나는 직선의 y 절편은?

① 15 ② -15 ③ $\frac{15}{4}$ ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ 3

해설

직선을 $3x + 4y + a = 0$ 라 하면,

$$\frac{|a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \text{ 에서}$$

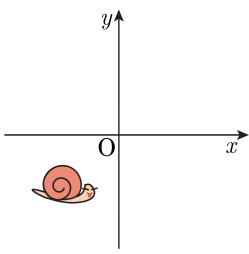
$$\therefore a = \pm 15$$

$$y \text{ 에 대해 정리하면 } y = -\frac{3}{4}x \pm \frac{15}{4}$$

기울기가 음수인 직선이 1 사분면을 지나기 위해서는 y 절편은 양수이어야 한다.

따라서 이 직선의 y 절편은 $\frac{15}{4}$

9. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



▶ 답 : 분

▷ 정답 : 5 분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.

즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분,
 $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면
원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

10. 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 을 x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

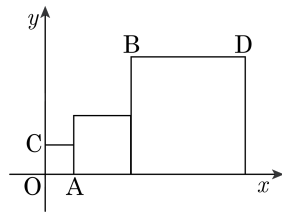
▷ 정답 : $a+b=6$

해설

원의 중심 $(1,-2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로 5평행 이동시키면, $(1,-2) \rightarrow (3,3)$
 $\therefore a=3, b=3, a+b=6$

11. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $C(0, 4)$, 점 $D(21, 12)$ 일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?

- ① 11 ② 13 ③ 15
 ④ 17 ⑤ 21



해설

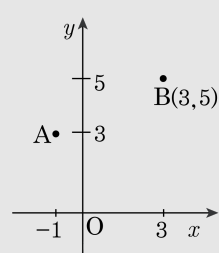
가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로
 점 A(4, 0) 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로
 점 B(21 - 12, 12)
 즉, B(9, 12)
 $\therefore \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

12. 두 점 A(-1, 3), B(3, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

- ① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P(a , 0)이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$
 $(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$
 $\therefore a = 3$
Q(0, b)이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$
 $1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$
 $\therefore 4b = 24$
 $\therefore b = 6$ P(3, 0), Q(0, 6)
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



13. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$$

$$\therefore x = \pm 6$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 6$$

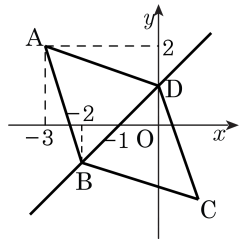
14. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로
 $\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은
 $\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1}\right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고,
이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로
 $\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$
 $\therefore a+2b-1=0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 이다.
 $\therefore 3a+b=5$

15. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

16. 원점에서 직선 $(a-1)x + (a+3)y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$$f(a) = \frac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2 + (a+3)^2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2a^2 + 4a + 10}}$$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$$2a^2 + 4a + 10 = 2(a^2 + 2a) + 10 = 2(a+1)^2 + 8$$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$$f(a) \text{ 의 최댓값은 } \therefore \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

17. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
 $\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}
 & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\
 & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\
 & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\
 & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\
 &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\
 &\therefore r = 16
 \end{aligned}$$

18. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

① $3 + 2\sqrt{2}$

② $2 + \sqrt{3}$

③ $3\sqrt{3}$

④ 6

⑤ $6 + 2\sqrt{3}$

해설

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 은 중심이 $(3, 3)$,

반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고

$P(x, y)$ 에 대하여

$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x} = k, y = kx$ 이므로

$\overline{OP}$ 의 기울기의 최댓값이다.

$y = kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산

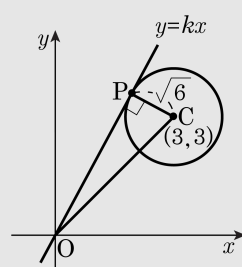
하면

$kx - y = 0$ 에서 중심 $(3, 3)$ 까지의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.

$$\frac{|3k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{6}, k^2 - 6k + 1 = 0$$

$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3 + 2\sqrt{2}$ 이다.

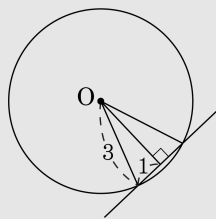


19. 직선 $y = x + m$ 이 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 2 일 때, m^2 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설



위 그림을 보면 원과 직선사이 거리가

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.

이제 공식을 사용하면,

$$\frac{|m|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow m = \pm 4$$

$$\therefore m^2 = 16$$

20. 점 A(3, -1)에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q₁, Q₂라고 할 때, 두 점 Q₁, Q₂를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 꼴로 나타낼때, $m^2 + n^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

원 위의 두 접점을 Q₁(a₁, b₁), Q₂(a₂, b₂)라 하면
각각의 접선의 방정식은 $a_1x + b_1y = 5$, $a_2x + b_2y = 5$ 이고
두 직선은 동시에 P(3, -1)를 지나므로
 $3a_1 - b_1 = 5$, $3a_2 - b_2 = 5$ 이 함께 성립한다.
이것은 $3x - y = 5$ 위에 두 점
Q₁(a₁, b₁) , Q₂(a₂, b₂) 가
동시에 있는 것을 의미하므로
Q₁, Q₂를 지나는 직선의 방정식은 $3x - y = 5$ 이다.
따라서 $y = 3x - 5$ 에서 $m = 3$, $n = -5$

21. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 4 \text{ , } (x - 5)^2 + y^2 = 25$

- ① $y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)
- ② $y = \pm \frac{4}{5}x \pm 2$ (복부호 동순)
- ③ $y = \pm \frac{5}{6}x \pm \frac{7}{5}$ (복부호 동순)
- ④ $y = \pm \frac{9}{10}x \pm \frac{11}{8}$ (복부호 동순)
- ⑤ $y = \pm \frac{10}{11}x \pm \frac{4}{3}$ (복부호 동순)

해설

$x^2 + y^2 = 4 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Gamma}}$

$(x - 5)^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Delta}}$

공통접선의 방정식을 $y = ax + b$

$\cdots \cdots \textcircled{\tiny{\Theta}}$ 로 놓으면

원 $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ 과 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 이

접하므로

$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 2$

$\therefore |b| = 2\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{A}}}$

또, 원 $\textcircled{\tiny{\Delta}}$ 도 직선 $\textcircled{\tiny{\Theta}}$, 즉 $ax - y + b = 0$ 과 접하므로

$\frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 5$

$\therefore |5a + b| = 5\sqrt{a^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{\text{B}}}$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{\tiny{\text{A}}} \div \textcircled{\tiny{\text{B}}}$ 을 하면

$\frac{|5a + b|}{|b|} = \frac{5}{2}$

$2|5a + b| = 5|b|, 2(5a + b) = \pm 5b$

$\therefore b = -\frac{10}{7}a$ 또는 $b = \frac{10}{3}a$

(i) $b = -\frac{10}{7}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

$\frac{10}{7}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 7\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$24a^2 + 49 = 0$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(ii) $b = \frac{10}{3}a$ 일 때, $\textcircled{\tiny{\text{A}}}$ 에서

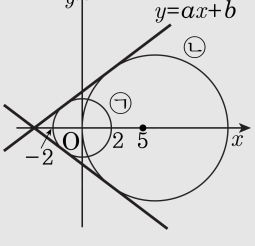
$\frac{10}{3}|a| = 2\sqrt{a^2 + 1}, 5|a| = 3\sqrt{a^2 + 1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $16a^2 = 9, a^2 = \frac{9}{16}$

$\therefore a = \pm \frac{3}{4}, b = \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)

(i), (ii)로부터 구하는 공통접선의 방정식은

$y = \pm \frac{3}{4}x \pm \frac{5}{2}$ (복부호 동순)



22. 두 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$, $x^2 + (y-6)^2 = 8$ 사이의 최단거리를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

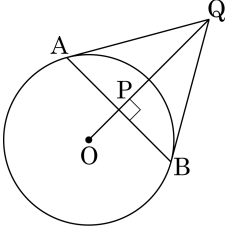
▷ 정답 : 8

해설

두 원 사이의 최단 거리는 중심거리에서
두 원의 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{\{0 - (-1)\}^2 + \{6 - (-1)\}^2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\&= 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\&= 2\sqrt{2} \\ \therefore d^2 &= 8\end{aligned}$$

23. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90^\circ$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해

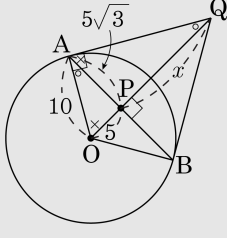
$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$$\therefore \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \frac{75}{5} = 15$$



24. 두 점 A (1,3), B (4,1) 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 A (1,3) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면
A' (1,-3)
이 때, 다음 그림에서
 $\overline{AP} = \overline{A'P}$
또, $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + \{1-(-3)\}^2} = 5$

25. 좌표평면 위의 네 점 $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, (a, b) 로 이루어진 사각형이 평행사변형이 될 때, 다음 <보기> 중 (a, b) 가 될 수 있는 좌표의 개수는?

보기		
㉠ $(2, 2)$	㉡ $(1, 2)$	㉢ $(0, 0)$
㉤ $(-4, 2)$	㉥ $(-2, 2)$	㉦ $(0, 3)$

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

평행사변형을 □ABCD 라 하면, 점 A, B, C, D를 어떻게 잡느냐에 따라 (a, b) 의 좌표가 달라진다.
<보기> 의 좌표를 하나씩 찍어보면 평행사변형이 되는 경우는 $(2, 2)$, $(0, 0)$, $(-2, 2)$ 3 가지가 있다.

26. 원 점 O를 한 꼭짓점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 무게중심의 좌표가 (8, 6)이다. 이를 만족하는 두 점 A, B에 대하여 AB가 반드시 지나가는 점의 좌표를 (p, q) 라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$A(a, b)$, $B(c, d)$ 라 하면,

무게중심은 $\left(\frac{a+c}{3}, \frac{b+d}{3}\right) = (8, 6)$ 이므로

$$a+c=24, \quad b+d=18$$

$\therefore$ AB의 중점은

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (12, 9)$$

$$\therefore p+q=21$$

27. $\triangle ABC$ 의 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $(1, 5), (-2, 1), (9, -1)$ 이라 하자. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점 D 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3(a-b)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\overline{AD} \text{가 } \angle A \text{의 이등분선이므로}$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$$

따라서 D 는 $\overline{BC}$ 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점

$$\therefore D\left(\frac{9-4}{3}, \frac{-1+2}{3}\right) = D\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore 3(a-b) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4$$

28. 점 A(3, -1)과 직선 $x + y - 3 = 0$ 위의 점 P를 연결하는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $x + 2y - 5 = 0$

② $2x - 2y + 5 = 0$

③ $2x - y - 5 = 0$

④ $x + y - 5 = 0$

⑤ $2x + 2y - 5 = 0$

해설

$x + y - 3 = 0$ 위의 임의의 한 점을 $P(a, -a + 3)$ 이라 하고 $\overline{AP}$ 의 중점의 좌표를 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{a + 3}{2}, \quad y = \frac{-a + 2}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, \quad a = -2y + 2$$

$$\therefore 2x - 3 = -2y + 2$$

$$\therefore 2x + 2y - 5 = 0$$

29. $y = |x - 2| + 1$, $y = mx$ 에 대해 두 식을 동시에 만족하는 (x, y) 가 존재하지 않을 때, m 의 값의 범위는?

- ① $-1 < m < \frac{1}{2}$ ② $-1 \leq m < \frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2} < m < 1$
 ④ $-\frac{1}{2} \leq m < 1$ ⑤ $-\frac{1}{2} \leq m < 0$

해설

$A : y = |x - 2| + 1$

$B : y = mx$ 라고 하면

$A : x \geq 2 \rightarrow y = x - 1$

$x < 2 \rightarrow y = 3 - x$

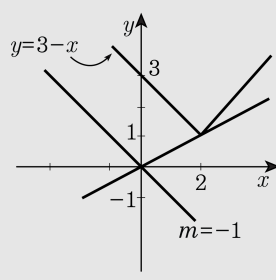
$B : y = mx$ 가 점 $(2, 1)$ 을 지날 때

보다

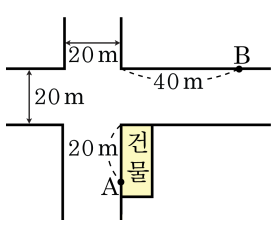
아래에 있으므로 $1 > 2m \rightarrow m < \frac{1}{2}$

$y = mx$ 의 기울기 $m \geq -1$ 이어야 하므로

$\therefore -1 \leq m < \frac{1}{2}$



30. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)
- ① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$
 ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$



해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는 좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는

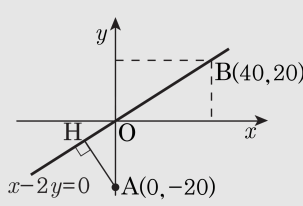
각각 $(0, -20)$, $(40, 20)$ 이다. 이 때, 원점과

점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x - 2y = 0$

이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할

최소거리는 점 A 와 직선 $x - 2y = 0$

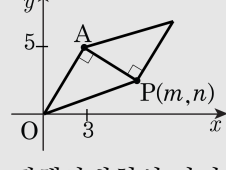
사이의 거리이다. $\therefore \overline{AH} = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot (-20)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 8\sqrt{5}$



31. O 를 원점으로 하는 평면위의 점 $A(3, 5)$ 와 점 $P(m, n)$ 가 있다. 이 때 $\overline{OA}, \overline{OP}$ 를 두 변으로 하는 평행사변형 넓이의 최솟값을 p , 그 때의 점 P 의 개수를 q 라 할 때, $p^2 + q^2$ 의 값을 구하면?
(단, m, n 은 정수이고 $0 < m < 10$ 이다.)

① 10 ② 17 ③ 26 ④ 29 ⑤ 37

해설



평행사변형의 넓이 $= \overline{OA} \times (\text{점 } P \text{에서 직선 } OA \text{까지의 거리})$

$$\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{거리 } d = \frac{|5m - 3n|}{\sqrt{34}}$$

$$(\because \text{직선 } OA : y = \frac{5}{3}x)$$

$$\therefore \text{ 넓이} = \sqrt{34} \cdot \frac{|5m - 3n|}{\sqrt{34}} = |5m - 3n|$$

m, n 이 정수이고 정수의 차는 정수이므로

$|5m - 3n| = 1$ 이 될 때 넓이가 최소이다.

$$\therefore p = 1$$

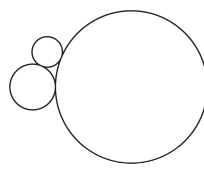
$|5m - 3n| = 1$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 (m, n) 을 구하면

$\cdots (-2, -3), (-1, -2), (1, 2), (2, 3),$

$(4, 7), (5, 8), (7, 12), (8, 13), (10, 17) \cdots$ 등이다.

$$\therefore q = 6, p^2 + q^2 = 37$$

32. 반지름이 각각 2, 3, 10인 세 원이 그림과 같이
둘 짝 서로 외접하고 있다. 이 때, 세 접점을 지
나는 원의 넓이를 구하면?

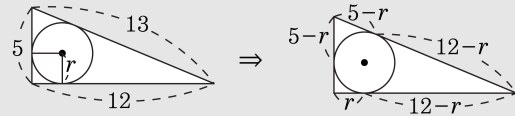


- ① $\frac{8}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{9}{2}\pi$
④ 6π ⑤ $\frac{20}{3}\pi$

해설

중심사이거리가 각각 12, 5, 13 이다. 세 원의 중심을 이은 삼각
형은 $12^2 + 5^2 = 13^2$ 이므로 직각삼각형이다.

$\therefore$ 세 점을 지나는 원은 직각삼각형의 내접원이다.

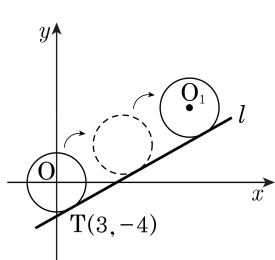


$$\Rightarrow (5-r) + (12-r) = 13$$

$$\Rightarrow r = 2$$

$$\therefore \text{원의 넓이는 } \pi \times 2^2 = 4\pi$$

33. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O_1 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한편, 원 O_1 의 중심의 좌표는 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO_1 의 기울기와 같고,

직선 OO_1 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore$ (직선 OO_1 의 기울기)

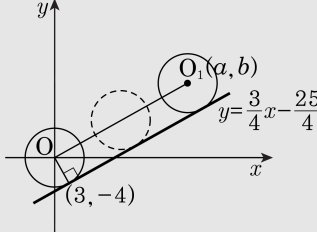
$=$ (직선 l 의 기울기)

$= \frac{3}{4}$

직선 l 의 방정식은 $y - (-4) =$

$\frac{3}{4}(x - 3)$

$\therefore y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$



34. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$

② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$

④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{AB}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots \textcircled{1}$$

그리고 $\overline{AB}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m \left(\frac{a+c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b+d = m(a+c) \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$a-c = \frac{b+d}{a+c} (d-a)$$

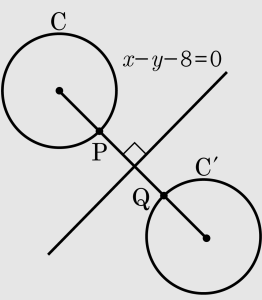
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

35. 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C' 이라 하고 두 원 C, C' 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

- ① 1
- ② 3
- ③ $7\sqrt{5} - 12$
- ④ 5
- ⑤ $11\sqrt{2} - 10$

해설

선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면
 다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결
 한 선분이
 두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡
 으면 된다.
 이 때, 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을
 표준형으로 나타내면
 $(x + 3)^2 + y^2 = 25$ 이므로
 이 원의 중심은 $(-3, 0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.
 이 원을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한
 원 C' 의 중심을 (a, b) 라 하면
 두 점 $(-3, 0)$ 과 (a, b) 를 이은



선분의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가

직선 $x - y - 8 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{a-3}{2} - \frac{b}{2} - 8 = 0$$

$$\therefore a - b = 19 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, 직선 $x - y - 8 = 0$, 즉 $y = x - 8$ 의 기울기는 1 이고,
 두 원의 중심 $(-3, 0)$, (a, b) 를 연결한 직선과 수직이므로

$$\frac{b}{a+3} = -1$$

$$\therefore a + b = -3 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 8, b = -11$

따라서, 두 원의 중심 $(-3, 0), (8, -11)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{\{8 - (-3)\}^2 + \{-11 - 0\}^2} = 11\sqrt{2}$$

이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의
 길이의 최솟값은

$$11\sqrt{2} - 5 \times 2 = 11\sqrt{2} - 10$$

