

1. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① ± 1

② ± 2

③ ± 3

④ ± 4

⑤ ± 5

해설

$$\begin{aligned} i(x+2i)^2 &= i(x^2 + 4ix - 4) = x^2i - 4x - 4i \\ &= -4x + (x^2 - 4)i \end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$$\therefore x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

2. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$ 를 만족하는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$$

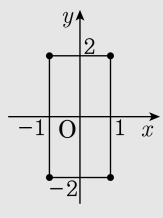
복소수의 상등에 의하여

$$|x|+|y|=3, 3|x|-4|y|=-5$$

두 식을 연립하면

$$|x|=1, |y|=2$$

$$(x, y) \rightarrow (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$$



$$\therefore \text{직사각형의 넓이} = 2 \times 4 = 8$$

3. 복소수 $z = a + bi$, $w = b + ai$ (a, b 는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $\bar{z}$, $\bar{w}$ 는 각각 z , w 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z} = w$

② $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{z}{w}$

③ $z \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot w$

④ $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ $i(\bar{z} + \bar{w}) = z + w$

해설

① : $i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② : ①에서 $\bar{z} = -iw$ ㉠

같은 방법으로 $\bar{w} = -iz$ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{-iz}{-iw} = \frac{z}{w}$

③ : ㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

$\therefore$ 좌변 $\neq$ 우변

④ : ②에서 $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ : $i(\bar{z} + \bar{w}) = i\bar{z} + i\bar{w} = w + z = z + w$

4. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

- ① I, II ② I, III ③ II, III, IV
④ II, IV ⑤ III, IV

해설

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

5. 이차방정식 $x^2 + 2(k - 1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - 4 = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k - 3)(k + 1) = 0$$

$$\therefore k = 3, -1$$

6. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + ka - 2k + b = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 2

④ -2

⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$$\Rightarrow D' = a^2 - (a^2 + ka - 2k + b) = 0$$

$$-ka + 2k - b = 0$$

$$k(2 - a) - b = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad b = 0 \quad a + b = 2$$

7. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a - 5 = 0$ 의 두 실근을 β, β^2 이라 할 때, $a + \beta + \beta^2$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta + \beta^2 = -a - 1$ 이므로
 $a + \beta + \beta^2 = a - a - 1 = -1$

8. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합을 구하면?

① $-2 + \sqrt{2}$

② $\frac{3}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 3

⑤ $-1 + \sqrt{3}$

해설

방정식 $f(2x) = 0$ 에서 $2x = t$ 로 놓으면

$$f(t) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 두 근이 $t = \alpha$ 또는 $t = \beta$ 이므로

$$2x = \alpha \text{에서 } x = \frac{\alpha}{2}, 2x = \beta \text{에서 } x = \frac{\beta}{2}$$

따라서 방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (k-3)x + k+2 = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $k \geq -5 - 2\sqrt{6}$ ② $k \geq -5 + 2\sqrt{6}$ ③ $k \geq -5 + \sqrt{6}$
④ $k \geq 5 + \sqrt{6}$ ⑤ $k \geq 5 + 2\sqrt{6}$

해설

$x^2 - (k-3)x + k+2 = 0$ 에서
 $D = (k-3)^2 - 4(k+2)$
 $= k^2 - 6k + 9 - 4k - 8$
 $= k^2 - 10k + 1 \geq 0$
 $\therefore k \leq 5 - 2\sqrt{6}$ 또는 $k \geq 5 + 2\sqrt{6}$
두 근의 합 $k-3 > 0$ 이므로 $k > 3$
두 근의 곱 $k+2 > 0$ 이므로 $k > -2$
따라서 $k \geq 5 + 2\sqrt{6}$

10. 네 함수 $F(x) = x^2 + 4x + 9$, $G(x) = x^2 - 6x + 4$, $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = cx + d$ 가 있다. $F(x)$ 와 $G(x)$ 가 최솟값을 갖게 되는 x 값들이 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표값일 때, 함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 가 최솟값을 갖게되는 x 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$F(x) = x^2 + 4x + 9 = (x+2)^2 + 5$, $G(x) = x^2 - 6x + 4 = (x-3)^2 - 5$
이므로 각각의 함수는 $x = -2$, $x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 -2 와 3 이므로
 $x^2 + ax + b = cx + d$,

즉 $x^2 + (a - c)x + (b - d) = 0$ 은 두 근이 -2 , 3 이다.

근과 계수의 관계에 의해

$$a - c = -1, \quad b - d = -6$$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 + (a - c)x + (b - d) \\ &= x^2 - x - 6 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 $h(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

11. $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 3$

② $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

③ $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + 3$

④ $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -2x^2 + 3$

해설

$x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y = a(x+2)^2 + 3$ 의 형태임을 의미한다.

이 중 $(0, -3)$ 을 지나면,

$$-3 = 4a + 3$$

$$4a = -6$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$$

12. 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 2k$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2kx + 2k \\ &= -(x^2 - 2kx) + 2k \\ &= -(x - k)^2 + k^2 + 2k \end{aligned}$$

$$\text{최댓값 } M = k^2 + 2k = (k + 1)^2 - 1$$

따라서 M 의 최솟값 -1 이다.

13. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$$

... ㉠

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$$t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

14. x 가 실수일 때, 함수 $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

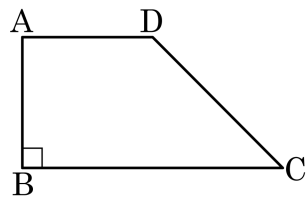
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 3} = k$ 라 하면
 $x^2 + 4x - 1 = k(x^2 - 2x + 3)$
 $(k - 1)x^2 - (2k + 4)x + 3k + 1 = 0$
 $D/4 = (k + 2)^2 - (k - 1)(3k + 1) \geq 0$
 $-2k^2 + 6k + 5 \geq 0$
근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은 3이다.

15. 다음 그림의 사다리꼴 ABCD 에서 $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 18$ 일 때, 이 사다리꼴의 최대 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

꼭짓점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 변 AB 의 길이를 x 라 하면 $\triangle DHC$ 는 이등변삼각형이고 변 BC 의 길이는 $18 - x$ 이다.

$$\overline{AB} = \overline{DH} = \overline{HC} = x$$

$$\overline{AD} = \overline{BH} = 18 - x - x = 18 - 2x$$

사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \{ (18 - 2x) + (18 - x) \} \times x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 18x \\ &= -\frac{3}{2}(x - 6)^2 + 54 \end{aligned}$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 사다리꼴 넓이의 최댓값은 54 이다.

16. 지면으로부터 초속 20m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면, $h = 20t - 5t^2$ 인 관계식이 성립한다. 물체가 가장 높이 올라갔을 때 걸린 시간과 그때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답:

▶ 정답 : 2초

▶ 정답 : 20m

해설

$$h = 20t - 5t^2 = -5(t - 2)^2 + 20$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.

17. 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$

② $\sqrt{2}i$

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

(준식) $= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2x + 3) = 0$

실근의 합은 $1 + (-1) = 0$

허근의 합은 -2

모든 근의 합은 -2

18. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

19. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

보기

- $\textcircled{\text{㉠}} \quad \omega + \frac{1}{\omega} = -1$
- $\textcircled{\text{㉡}} \quad \omega^2 + \bar{\omega}^2 = 1$
- $\textcircled{\text{㉢}} \quad (\omega + 1)(\bar{\omega} + 1) = 1$

- $\textcircled{\text{1}} \quad \textcircled{\text{㉠}}$
- $\textcircled{\text{2}} \quad \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{3}} \quad \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{4}} \quad \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{5}} \quad \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

해설

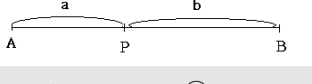
$x^3 = 1,$
 $x^3 - 1 = 0,$
 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
 $w^2 + w + 1 = 0 \cdots \textcircled{\text{1}}$
 $\bar{w}^2 + \bar{w} + 1 = 0 \cdots \textcircled{\text{2}}$
 $\textcircled{\text{㉠}} \quad \textcircled{\text{1}}$ 식을 w 로 나누면 $w + \frac{1}{w} = -1$
 $\textcircled{\text{㉡}} \quad x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근 $w, \bar{w}$
 $w + \bar{w} = -1, w\bar{w} = 1$
 $w^2 + \bar{w}^2 = (w + \bar{w})^2 - 2w\bar{w} = 1 - 2 = -1$
 $\textcircled{\text{㉢}} \quad (w + 1)(\bar{w} + 1)$
 $= w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
 $\therefore \textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 맞음

20. 거리가 100 m인 두 지점 A, B가 있다. 갑은 A에서 출발하며 B로 달리고, 을은 B에서 출발하여 A로 자전거를 타고 달렸다. 두 사람은 동시에 출발하여 P지점에서 만났는데 만나고 나서 갑은 8초 후에 B에, 을은 2초 후에 A에 도착하였다. 갑, 을이 각각 일정한 속도로 달렸다고 할 때, A, P사이의 거리는?

- ① 20 m
- ② 30 m
- ③ $\frac{100}{3}$ m
- ④ $\frac{121}{4}$ m
- ⑤ $\frac{147}{5}$ m

해설

갑의 속도를 α , 을의 속도를 β 라 하자.



$a + b = 100 \cdots \textcircled{1}$

$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}, \quad \frac{b}{\alpha} = 8, \quad \frac{a}{\beta} = 2$

정리하면 $\frac{a}{\left(\frac{b}{8}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)}$ 에서

$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{8}, \quad 4a^2 = b^2$

$\therefore b = 2a (\because a, b \text{는 양수})$

①에 대입하면, $3a = 100 \quad a = \frac{100}{3} \text{ m}$

21. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$

② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$

③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \cdots \textcircled{1} \\ x - y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 $y = x - 1$ 로 변형하여

①에 대입하면

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

22. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \dots \textcircled{A} \\ 2xy = y^2 - y & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

라 하면 $\textcircled{A}$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 ;

$\textcircled{B}$ 에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$ 일 때 ;

$\textcircled{B}$ 에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore y = 0, -\frac{1}{3}$

$\therefore = (0, 0), (0, 1), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

23. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + ax + 5 = 0$, $x^2 + 5x + a = 0$ 이 공통근을 갖는 실수 a 의 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통근을 p 라 하면

$$p^2 + ap + 5 = 0, p^2 + 5p + a = 0$$

두 식을 빼면, $(a - 5)p = a - 5$

$$(a - 5)(p - 1) = 0$$

$$\therefore a = 5 \text{ 또는 } p = 1$$

$$p = 1 \text{이면, } 1 + a + 5 = 0, a = -6$$

$$\therefore a \text{의 합: } -6 + 5 = -1$$

24. 두 이차방정식 $ax^2 + 4x + 2 = 0$, $x^2 + ax + 1 = 0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$$at^2 + 4t + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$t^2 + at + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2 : (a-2)t^2 + (4-2a)t = 0$$

$$(a-2)t(t-2) = 0$$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a \neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 $\textcircled{2}$ 에서 $2a+5=0$

$$\therefore a = -\frac{5}{2}$$

25. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$m = -1, 7$$