

1. 세 수의 곱이 모두 2^{24} 이 되도록 하는 서로 다른 2^x (단, x 는 자연수)의 형태의 수를 찾으려 한다. 학생들의 대화 중 틀린 말을 한 사람을 골라라.

재석 : 그럼 식을 $2^a \times 2^b \times 2^c = 2^{24}$ 의 형태로 만들면 되겠네.
유석 : 그럼 $a = 3, b = 5, c = 16$ 으로 놓으면 $2^3 \times 2^5 \times 2^{16} = 2^{24}$ 하나가 나오겠네.
동성 : $2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2 \times 3 \times 4} = 2^{24}$ 도 되겠구나.
성일 : 문제는 $2^{a+b+c} = 2^{24}$ 이니까 $a + b + c = 24$ 인 a, b, c 를 찾으려면 돼.
수근 : 그럼 많이 나올 수 있겠네. 그 중 $a = 7, b = 8, c = 9$ 인 경우도 되는 거구나.

▶ 답 :

▷ 정답 : 동성

해설

재석 : 그럼 식을 $2^a \times 2^b \times 2^c = 2^{24}$ 의 형태로 만들면 되겠네.
(○)
유석 : 그럼 $a = 3, b = 5, c = 16$ 로 놓으면 $2^3 \times 2^5 \times 2^{16} = 2^{24}$ 하나가 나오겠네.(○)
동성 : $2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9$ (×)
성일 : 문제는 $2^{a+b+c} = 2^{24}$ 이니까 $a + b + c = 24$ 인 a, b, c 를 찾으려면 돼.(○)
수근 : 그럼 많이 나올 수 있겠네. 그 중 $a = 7, b = 8, c = 9$ 인 경우도 되는 거구나.(○)

2. $4^{x+3} = 4^x \times 2^y = 8^4$ 을 만족시키는 자연수 x, y 에 대하여 $x - y$ 의 값은?

① -4

② -3

③ 6

④ 9

⑤ 12

해설

$$(2^2)^{x+3} = 2^{2x+y} = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$2x + 6 = 12, \quad 2x + y = 12$$

$$y = 6, x = 3$$

$$\therefore x - y = 3 - 6 = -3$$

3. $81^5 = (3^a)^5 = 3^a$ 에서 안에 알맞은 수를 차례로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 20

해설

$81 = 3^4$, $(3^4)^5 = 3^{20}$ 이므로 4, 20이다.

4. $3^{12} = 81^x$ 일 때, x 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$3^{12} = (3^4)^x = 3^{4x}$$

$$\therefore x = 3$$

5. $x - y = 2$ 이고 $a = 2^{3x}$, $b = 2^{3y}$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 8

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 128

해설

$$\frac{a}{b} = 2^{3x-3y} = 2^{3(x-y)} = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$$

6. 다음 중 $a^5 \div a^2 \div a$ 과 계산 결과가 같은 것은?

- ① $a^5 \div (a^2 \div a)$ ② $a^5 \div (a^2 \times a)$ ③ $a^5 \times (a^2 \div a)$
④ $a^5 \div a^2 \times a$ ⑤ $a^5 \times a^2 \div a$

해설

$a^5 \div a^2 \div a = a^{5-2-1} = a^2$ 이므로 $a^5 \div (a^2 \times a)$ 이다.

7. $64^4 \div 8^5$ 을 간단히 하면?

① 2^8

② 2^9

③ 2^{10}

④ 2^{11}

⑤ 2^{12}

해설

$$(2^6)^4 \div (2^3)^5 = 2^{24-15} = 2^9$$

8. $81^2 \div 9^5$ 을 간단히 하면?

① 3

② 3^2

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{3^2}$

⑤ $\frac{1}{3^3}$

해설

$$(3^4)^2 \div (3^2)^5 = 3^{8-10} = \frac{1}{3^2}$$

9. $(4x^a)^b = 64x^{15}$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$(4x^a)^b = 4^b x^{ab} = 4^3 x^{15}$ 이므로 $b = 3$, $ab = 15$ 이다.
따라서 $a = 5$ 이므로 $a - b = 5 - 3 = 2$ 이다.

10. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\left(\frac{yz}{x}\right)^2 = \frac{y^2z^2}{x^2}$
③ $\left(\frac{x}{2y^2}\right)^3 = \frac{x^3}{8y^6}$
⑤ $\left(-\frac{xy}{2}\right)^4 = \frac{x^4y^4}{16}$

② $\left(-\frac{2x^2}{3}\right)^3 = -\frac{8x^2}{27}$
④ $\left(\frac{3}{x}\right)^4 = \frac{81}{x^4}$

해설

$\left(-\frac{2x^2}{3}\right)^3 = -\frac{8x^6}{27}$ 이므로 옳지 않은 것은 ②이다.

11. $x = \frac{1}{9}$ 일 때, $x^{\frac{1}{x}}$ 을 3 의 거듭제곱으로 나타내면?

① 3^6

② 3^9

③ 3^{18}

④ 3^{-12}

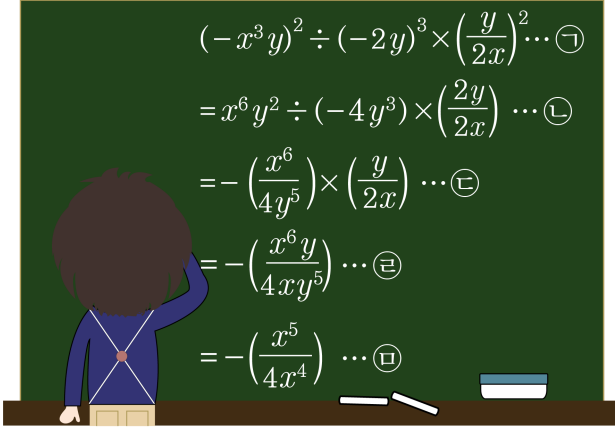
⑤ 3^{-18}

해설

$x = \frac{1}{9}$ 일 때, $\frac{1}{x} = 9$ 이므로

$$x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{9}\right)^9 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^9 = \frac{1}{3^{18}} = 3^{-18}$$

12. 진수는 칠판에 적힌 $(-x^3y)^2 \div (-2y)^3 \times \left(\frac{y}{2x}\right)^2$ 을 풀어보았을 때, 다음 중 처음으로 틀린 곳을 찾아라.



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

$$\begin{aligned} & (-x^3y)^2 \div (-2y)^3 \times \left(\frac{y}{2x}\right)^2 \\ &= x^6y^2 \div (-8y^3) \times \frac{y^2}{4x^2} \\ &= -\frac{x^6}{8y} \times \frac{y^2}{4x^2} \\ &= -\frac{x^4y}{32} \end{aligned}$$

이다. 처음으로 틀린 곳은 ㉡이다.

13. 다음 $\square$ 안에 알맞은 식은?

$$\left(-\frac{5b^2}{2a^3}\right)^2 \times \square^3 \div \frac{5}{3}a^2b^7 = -\frac{10}{9}a$$

- ① $-\frac{4}{3}a^3b$ ② $-\frac{2}{3}ab^3$ ③ $-\frac{2}{3}a^3b$
④ $-\frac{4}{3}a^2b^3$ ⑤ $\frac{4}{3}a^2b^3$

해설

$$\begin{aligned}\frac{25b^4}{4a^6} \times \square^3 \times \frac{3}{5a^2b^7} &= -\frac{10}{9}a \text{ 이므로} \\ \square^3 &= -\frac{10}{9}a \times \frac{4a^6}{25b^4} \times \frac{5a^2b^7}{3} \therefore \square = -\frac{2}{3}a^3b \\ &= -\frac{8}{27}a^9b^3 \\ &= \left(-\frac{2}{3}a^3b\right)^3\end{aligned}$$

14. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ 일 때, $a - (b + c - d)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \\ &= 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \\ &\therefore 8 - (4 + 2 - 1) = 3 \end{aligned}$$

15. $x^6 + x^6 + x^6 + x^6 + x^6 + x^6 = 6^7$ 일 때, 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

좌변을 계산하면 $6x^6 = 6^7$

$$x^6 = 6^6$$

$$\therefore x = 6$$

16. $5^5 \div 5^a = 25$, $5^b + 5^b + 5^b + 5^b + 5^b = 5^4$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}5^5 \div 5^a &= 5^{5-a} = 5^2 \\5 - a &= 2 \quad \therefore a = 3 \\5 \times 5^b &= 5^4, 5^{b+1} = 5^4 \\b + 1 &= 4 \quad \therefore b = 3 \\a &= 3, b = 3 \\\therefore a - b &= 0\end{aligned}$$

17. $2^3 = x$ 일 때, 32^6 을 x 의 거듭제곱으로 바르게 나타낸 것은?

① x^2

② x^4

③ x^6

④ x^8

⑤ x^{10}

해설

$$32^6 = (2^5)^6 = 2^{30} = (2^3)^{10} = x^{10}$$

18. $a = 2^{x-1}$ 일 때, 16^x 을 a 에 관한 식으로 나타낸 것을 고르면?

① $8a^3$

② $8a^4$

③ $16a^3$

④ $16a^4$

⑤ $32a^4$

해설

$$a = 2^{x-1}, \quad 2^x = 2a$$

$$16^x = (2^4)^x = (2^x)^4 = (2a)^4 = 16a^4$$

19. $2^5 \times 5^7 \times 7$ 이 n 자리의 자연수일 때, n 의 값은?

① 5

② 7

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$2 \times 5 = 10$ 이므로

$$(2 \times 5)^5 \times 5^2 \times 7 = 175 \times 10^5$$

$$\therefore n = 8$$

20. $2^{10} \times 3 \times 5^8$ 은 몇 자리의 수인가?

- ① 8 자리의 수 ② 9 자리의 수 ③ 10 자리의 수
④ 11 자리의 수 ⑤ 12 자리의 수

해설

$2^{2+8} \times 3 \times 5^8 = 2^2 \times 3 \times (2 \times 5)^8 = 12 \times 10^8$
따라서 10 자리의 수이다.

21. $3^{2x+4} \times 9^{3-x} \times 4^x = 81 \times 6^{2x}$ 일 때, x 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 3^{2x+4} \times 9^{3-x} \times 4^x &= 3^{2x+4} \times (3^2)^{3-x} \times (2^2)^x \\ &= 3^{2x+4} \times 3^{6-2x} \times 2^{2x} \\ &= 3^{10} \times 2^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 81 \times 6^{2x} &= 3^4 \times 2^{2x} \times 3^{2x} \\ &= 3^{4+2x} \times 2^{2x} \end{aligned}$$

$4 + 2x = 10$ 이므로 $x = 3$ 이다.

22. $(a^2)^x \times (b^4)^y \times a \times b^6 = a^9 b^{14}$ 이 성립할 때, xy 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$(a^2)^x \times (b^4)^y \times a \times b^6 = a^{2 \times x + 1} b^{4 \times y + 6} = a^9 b^{14}$$

$$2x + 1 = 9, 4y + 6 = 14$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

$$xy = 4 \times 2 = 8$$

23. $X = 2^a$ 일 때, $K(X) = a$ 로 정한다. 이때, $K(2^{4(m-2)} \div 4^{2m-6})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2^{4(m-2)} \div 4^{2m-6} = 2^a$$

$$2^{4m-8} \div 2^{2(2m-6)} = 2^{4m-8-4m+12} = 2^4$$

$$\therefore a = 4$$

24. 메모리 용량 1MB 의 2^{10} 배를 1GB 라고 한다. 기영이가 가지고 있는 MP3 가 1GB 의 용량을 넣을 수 있다고 하면, 기영이는 4MB 의 노래를 몇 개 넣을 수 있는지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 256 개

해설

1GB 는 1MB 의 2^{10} 배 이므로 2^{10} MB 이다. 4MB 는 2^2 MB 이므로 $2^2 \times x = 2^{10}$,
 $x = 2^8 = 256$

25. $(2^a \times 3^b \times 5^c)^m = 2^8 \times 3^{12} \times 5^{20}$ 일 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a, b, c, m 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(2^a \times 3^b \times 5^c)^m = 2^8 \times 3^{12} \times 5^{20}$$

$$2^{am} \times 3^{bm} \times 5^{cm} = 2^8 \times 3^{12} \times 5^{20}$$

$$am = 8, \quad bm = 12, \quad cm = 20$$

모두 자연수의 곱이므로 8, 12, 20 의 공약수가 곱해질 수 있다.

m 의 최댓값은 4 이다.

26. $(x^a \times y^b \times z^c)^m = x^{10} \times y^8 \times z^6$ 일 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a, b, c, m 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(x^a \times y^b \times z^c)^m = x^{10} \times y^8 \times z^6$$

$$x^{am} \times y^{bm} \times z^{cm} = x^{10} \times y^8 \times z^6$$

$$am = 10, \quad bm = 8, \quad cm = 6$$

모두 자연수의 곱이므로 10, 8, 6 의 공약수가 곱해질 수 있다.

m 의 최댓값은 2 이다.

27. $\left(\frac{-5x^a}{y}\right)^b = \frac{-125x^9}{y^{3c}}$ 일 때, $a + b - c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\left(\frac{-5x^a}{y}\right)^b = \frac{(-1)^b 5^b x^{ab}}{y^b} = \frac{-125x^9}{y^{3c}}$$

$$5^b = 125, \quad b = 3$$

$$x^{3a} = x^9, \quad a = 3$$

$$b = 3c = 3, \quad c = 1$$

$$\therefore a + b - c = 3 + 3 - 1 = 5$$

28. 다음 ㉠ ~ ㉣ 안에 알맞은 수를 넣어라.

$$\left(\frac{x^2z^{\boxed{\text{㉠}}}}{\boxed{\text{㉡}}y^5}\right)^{\boxed{\text{㉢}}}=\frac{x^8z^{12}}{16y^{20}}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠: 3

▷ 정답 : ㉡: 2

▷ 정답 : ㉢: 4

해설

$$2 \times \boxed{\text{㉢}} = 8, \therefore \boxed{\text{㉢}} = 4$$

$$\boxed{\text{㉠}} \times 4 = 12, \therefore \boxed{\text{㉠}} = 3$$

$$\boxed{\text{㉡}}^4 = 16, \therefore \boxed{\text{㉡}} = 2$$

29. n 이 자연수 일 때,
 $(-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^n(-1)^{n+2} + (-1)^{2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) n 이 홀수 일 때 :
 $n+1$ 은 짝수, $n+2$ 은 홀수, $2n$ 은 짝수이므로
 $(-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^n(-1)^{n+2} + (-1)^{2n}$
 $= -1 + 1 + (-1)(-1) + 1$
 $= 2$
ii) n 이 짝수 일 때 :
 $n+1$ 은 홀수, $n+2$ 은 짝수, $2n$ 은 짝수이므로
 $(-1)^n + (-1)^{n+1} + (-1)^n(-1)^{n+2} + (-1)^{2n}$
 $= 1 + (-1) + 1 \cdot 1 + 1$
 $= 2$
 $\therefore 2$

30. $x = 5^3$ 라 할 때, $5^5 - 5^4 + 5^3$ 을 x 에 관한 식으로 나타낸 것은?

- ① $6x$ ② $10x$ ③ $21x$ ④ $25x$ ⑤ $31x$

해설

$$5^5 - 5^4 + 5^3 = 5^3 \cdot 5^2 - 5^3 \cdot 5 + 5^3 = 25x - 5x + x = 21x$$

31. 3^x 의 일의 자리의 숫자가 1, 3^y 의 일의 자리의 숫자가 3일 때, $81^x \div 9^y$ 의 일의 자리의 숫자를 구하면? (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

- ① 1
- ② 3
- ③ 9
- ④ 7
- ⑤ 2

해설

3^k (k 는 자연수)의 일의 자리는

3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ...

$\therefore x = 4k_1, y = 4k_2 - 3$

(단, $k_2 \leq k_1$, k_1, k_2 는 자연수이다.)

$$\begin{aligned}81^x \div 9^y &= 3^{4x-2y} \\&= 3^{16k_1-8k_2+6} \\&= 3^{2(8k_1-4k_2+3)} \\&= 9^{8k_1-4k_2+3}\end{aligned}$$

9^k (k 는 자연수)의 일의 자리는 9, 1, 9, 1, ...

k_1, k_2 가 자연수이므로 $8k_1, 4k_2$ 는 짝수이다.

따라서 $8k_1 - 4k_2 + 3$ 은 홀수이므로

$81^x \div 9^y$ 의 일의 자리는 9이다.

32. 자연수 a 에 대하여 $a^{a+3} = a^{3a-1}$ 를 만족하는 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

$a^{a+3} = a^{3a-1}$ 에서

㉠ 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로

$a + 3 = 3a - 1$, $\therefore a = 2$

㉡ 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.

즉, $a = 1$ 일 때, $1^4 = 1^2$ 이다. $\therefore a = 1$

따라서 a 의 값은 1 과 2 이다.

33. 등식 $x^{3x} = x^{2x+4}$ 가 성립하는 자연수 x 의 값을 구하여 모두 합하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^{3x} = x^{2x+4}$ 에서

(1) 밑이 같으면 지수가 같아야 등호가 성립하므로 $3x = 2x + 4$, $\therefore x = 4$

(2) 1 의 거듭제곱은 지수와 관계없이 항상 1 이므로 등호가 성립한다.

즉, $x = 1$ 일 때, $1^3 = 1^6$ 이므로 항상 성립한다. $\therefore x = 1$
따라서 주어진 식을 만족하는 x 의 값을 모두 더하면 $4 + 1 = 5$ 이다.

34. $4^{2a-1} \times 8^{a-2} = 16^{a+1}$ 을 만족하는 a 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$(2^2)^{2a-1} \times (2^3)^{a-2} = (2^4)^{a+1}$$

$$4a - 2 + 3a - 6 = 4a + 4$$

$$\therefore a = 4$$

35. n 이 자연수일 때, $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \cdots + (-1)^{2n-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

(준식) $= (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) - 1 = -1$