

1. 두 복소수 $z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 에 대하여 $z_1 + (2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1 + (a-2)i$, $z_2 = (b-2) - ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$$1 + (a-2)i + (2-4i) = (b-2) - ai$$

$$3 + (a-6)i = (b-2) - ai$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = b-2, a-6 = -a$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$b=5, a=3$$

$$\therefore a+b=8$$

2. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2010}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \\ \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로} \\ f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) &= f(-i) + f(i) \\ &= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2010} \\ &= i^{2010} + (-i)^{2010} \\ &= (i^4)^{502} \cdot i^2 + \{(-i)^4\}^{502} \cdot (-i)^2 \\ &= -1 + (-1) = -2\end{aligned}$$

3. 등식 $(1+i)z + (2z-3i)i = 0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$

② $-3+9i$

③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10} - \frac{9}{10}i$

⑤ $-\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면
 $(1+i)(a+bi) + \{2(a+bi) - 3i\}i = 0$
 $(a+bi+ai-b) + (2ai-2b+3) = 0$
 $(a-3b+3) + (3a+b)i = 0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a-3b+3 = 0, 3a+b = 0$
두 식을 연립하여 풀면
 $a = -\frac{3}{10}, b = \frac{9}{10}$
 $\therefore z = -\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$

4. $z = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

- ① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$$z = \frac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1, z^3 = -i, z^4 = 1$$

(준식) : $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$$1+i-1-i=0$$

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$$

$$= 0+0+\cdots+0+z^{2008}$$

$$= z^{2008}$$

$$= (z^4)^{502}$$

$$= 1$$

5. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a 의 값은?

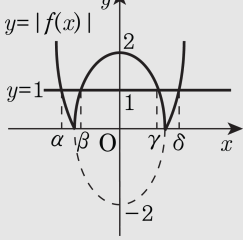
- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$|x^2 + (a-2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$
 $x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$
... ㉠
 $x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$
... ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a-2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore a-2 = 0, a = 2$

6. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

조건에서

$$1 + 3a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4a + b - c = 0$$

$$\therefore b - c = -4a$$

$$\therefore 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a - 1)^2 - 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

7. 이차방정식 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $S_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이라 할 때, $S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n = 7$, $S_4 + S_3 + S_2 = 4$ 이다. 이 때, 7, 4에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

- ① 0, 1 ② 0, 2 ③ 0, 3 ④ 1, 1 ⑤ 1, 2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -1, \quad \alpha\beta = 2 \\ S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n &= (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + 2(\alpha^n + \beta^n) \\ &= \alpha^n(\alpha^2 + \alpha + 2) + \beta^n(\beta^2 + \beta + 2) = 0 \\ (\because \alpha^2 + \alpha + 2 &= 0, \beta^2 + \beta + 2 = 0) \\ n = 2 \text{를 대입하면 } S_4 + S_3 + 2S_2 &= 0 \\ \therefore S_4 + S_3 + S_2 &= -S_2 \\ &= -(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= -\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} \\ &= -(1 - 4) = 3 \end{aligned}$$

8. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c\neq 0)$ 의 두 근이 α,β 일 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

$\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
1인 이차방정식은 $x^2+[\text{㉠}]x+\frac{1}{a\beta}=0$
근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\alpha\beta=\frac{c}{a}$
이므로 구하는 방정식은 $x^2+[\text{㉡}]x+\frac{a}{c}=0$
이것을 정리하면 $[\text{㉢}]=0$ 이다.

위의 풀이 과정에서 ㉠,㉡,㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),-\frac{b}{c},cx^2-bx+a$

② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),\frac{b}{c},cx^2+bx+a$

③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),-\frac{b}{c},cx^2-bx+a$

④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),\frac{b}{c},cx^2+bx+a$

⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right),\frac{b}{c},cx^2-bx+a$

해설

㉠ 는 $-(\text{두 근의 합})$ 이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\therefore-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right)$
 $-\left(\frac{\alpha+\beta}{a\beta}\right)=-\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}\leftarrow\text{㉡}$
 $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$
 $cx^2+bx+a=0\leftarrow\text{㉢}$

9. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 푸는데 A는 b 를 잘못 읽어 -4 와 7 을, B는 c 를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$ 를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a 와 c 를 바르게 읽었으므로

근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28, c = -28a$$

B는 a 와 b 는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6, b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

10. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - k(k+3)x + k^2 - 1 = 0$ 의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k 의 조건은?

- ① $-1 < k \leq 1$ ② $-1 < k < 1$ ③ $0 < k \leq 2$
④ $-1 \leq k \leq 0$ ⑤ $-1 \leq k \leq 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β 라 하자.
(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,
 $\alpha\beta = k^2 - 1 < 0, (k+1)(k-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1$
(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,
 $\alpha + \beta = k(k+3) > 0 \quad \therefore k > 0, k < -3$
 $\alpha\beta = k^2 - 1 = 0 \quad \therefore k = \pm 1$
따라서, $k = 1$
그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1 < k \leq 1$

11. 이차함수 $y = -5x^2 + 20x + 3$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. $a + b$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$\begin{aligned}y &= -5x^2 + 20x + 3 \\&= -5(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 \\&= -5(x - 2)^2 + 23 \\ \therefore a &= 2, b = 23 \\ \therefore a + b &= 2 + 23 = 25\end{aligned}$$

12. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = -2(x + 3)^2 + 4$$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

13. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + 4ax \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 8ax) \\ &= \frac{1}{2}(x + 4a)^2 - 8a^2 \end{aligned}$$

최솟값 $-8a^2 = -8, a^2 = 1$
 $\therefore a = -1 (\because a < 0)$

14. x 의 범위가 $1 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \text{ 이므로}$$

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x 의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),

$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

15. 차가 12인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x , $x + 12$ 라 하면
 $y = x(x + 12)$
 $= x^2 + 12x$
 $x = (x + 6)^2 - 36$
 $x = -6$ 일 때, 최솟값 -36 을 갖는다.
 $x = -6$, $-6 + 12 = 6$
따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

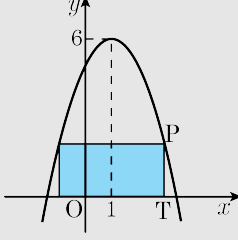
16. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는

$(t, -t^2 + 2t + 5)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(t - 1)$,

직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{둘레의 길이} &= 2[2(t - 1) - t^2 + 2t + 5] \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t - 2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

17. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 h m 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t - 3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

18. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1 \text{ 또는 } 2$$

19. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

20. 방정식 $x^5 = 1$ 의 허근을 ω 라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$ 일 때 $\alpha^2 + \alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \alpha^2 + \alpha = 1$$

21. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4, \alpha\beta\gamma = -3 \text{ 이므로} \\ (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \\ &= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ &= 1 - 2 + 4 + 3 = 6 \end{aligned}$$

22. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 $\omega, \bar{\omega}$ 라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?
- ① $\omega + \bar{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\bar{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \bar{\omega}, (\bar{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$
 $x^2 + x + 1 = 0 \implies \omega^3 = 1,$
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0,$
 $\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$

① $x^2 + x + 1 = 0$ 두근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로
 $\omega + \bar{\omega} = -1$ (○)

② $x^2 + x + 1 = 0$ 두근은 $\omega, \bar{\omega}$ 이므로
 $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$ (○)

③ $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega \cdot \bar{\omega}$
 $= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1$ (×)

④ $\omega + \bar{\omega} = -1,$
 $\bar{\omega} = -1 - \omega$
 $= -(1 + \omega) = \omega^2$
 $\omega + \bar{\omega} = -1, \omega = -1 - \bar{\omega} = -(1 + \bar{\omega})$
 $= \bar{\omega}^2$ (○)

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

24. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $-2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$
 $\alpha = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $1 + m + 2 - 4 = 0$
 $\therefore m = 1$
 $\therefore m + \alpha = 2$

25. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ 이 정수근을 가질 때, 정수 m 의 개수는?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + mx + m^2 - 1 = 0$ 에서 근의 공식에 의하여

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4(m^2 - 1)}}{2}$$

이 때, x 가 정수이므로

$$\sqrt{m^2 - 4(m^2 - 1)} = k \text{ (단, } k \text{는 정수는 } k \geq 0 \text{)라 하면}$$

$$-3m^2 + 4 = k^2$$

따라서, m 의 개수는 $-1, 0, 1$ 로 3개다.