1. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1 + (2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b = 5,\ a = 3$

$\therefore\ a+b = 8$

2. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2010}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① -2　　② $-2i$　　③ 0　　④ 2　　⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$ 이므로

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$=f(-i)+f(i)$$

$$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2010}$$

$$=i^{2010}+(-i)^{2010}$$

$$=(i^4)^{502}\cdot i^2+\left\{(-i)^4\right\}^{502}\cdot(-i)^2$$

$$=-1+(-1)=-2$$

3. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면

$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$

$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$

$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b+3=0$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$

$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

4. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

5. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$| x^2 + (a-2)x - 2 | = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$

$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$

$\cdots$ ㉠

$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$

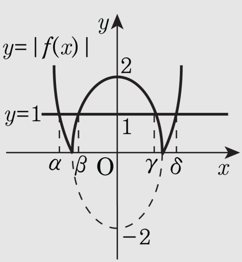
$\cdots$ ㉡

㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$

모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a - 2 = 0,\ a = 2$

6. $x^2 + 3ax + b = 0$과 $x^2 - ax + c = 0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1 + 3a + b = 0 \quad \cdots$ ㉠

$1 - a + c = 0 \quad \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a + b - c = 0$

$\therefore\ b - c = -4a$

$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$

따라서 $a = 1$일 때, 최소이다.

7. 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 α, β라 한다. $S_n=\alpha^n+\beta^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n=$(가), $S_4+S_3+S_2=$(나)이다. 이 때, (가), (나)에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

① 0, 1 ② 0, 2 ③ 0, 3 ④ 1, 1 ⑤ 1, 2

해설

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$

$S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n$

$=(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+2(\alpha^n+\beta^n)$

$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+2)+\beta^n(\beta^2+\beta+2)=0$

$(\because \alpha^2+\alpha+2=0,\ \beta^2+\beta+2=0)$

$n=2$를 대입하면 $S_4+S_3+2S_2=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_4+S_3+S_2&=-S_2\\&=-(\alpha^2+\beta^2)\\&=-\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}\\&=-(1-4)=3\end{aligned}$$

8. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c\neq 0)$의 두 근이 α,β일 때, $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
> 1인 이차방정식은 $x^2+[(가)]x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$
> 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$
> 이므로 구하는 방정식은 $x^2+[(나)]x+\frac{a}{c}=0$
> 이것을 정리하면 [(다)]$=0$이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ -\frac{b}{c},\ cx^2-bx+a$
② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ \frac{b}{c},\ cx^2+bx+a$
③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ -\frac{b}{c},\ cx^2-bx+a$
④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ \frac{b}{c},\ cx^2+bx+a$
⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right),\ \frac{b}{c},\ cx^2-bx+a$

해설

(가)는 $-$(두 근의 합)이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\ \therefore\ -\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=-\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}\leftarrow$ (나)

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

$cx^2+bx+a=0\leftarrow$ (다)

9. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3\pm\sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\dfrac{c}{a}=-4\cdot 7=-28,\ c=-28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\dfrac{b}{a}=(-3+\sqrt{2}i)+(-3-\sqrt{2}i)=-6,\ b=6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2+6ax-28a=0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

10. x에 관한 이차방정식 $x^2-k(k+3)x+k^2-1=0$의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k의 조건은?

① $-1<k\le 1$ ② $-1<k<1$ ③ $0<k\le 2$

④ $-1\le k\le 0$ ⑤ $-1\le k\le 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라 하자.

(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,

$\alpha\beta=k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$

$\therefore\ -1<k<1$

(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,

$\alpha+\beta=k(k+3)>0 \quad \therefore\ k>0,\ k<-3$

$\alpha\beta=k^2-1=0 \quad \therefore\ k=\pm 1$

따라서, $k=1$

그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1<k\le 1$

11. 이차함수 $y=-5x^2+20x+3$은 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a+b$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$$\begin{aligned} y &= -5x^2+20x+3 \\ &= -5(x^2-4x+4-4)+3 \\ &= -5(x-2)^2+23 \end{aligned}$$

$\therefore a=2,\ b=23$

$\therefore a+b=2+23=25$

12. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

13. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 4ax$ 의 최솟값이 -8 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, $a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 + 4ax \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 8ax) \\ &= \frac{1}{2}(x + 4a)^2 - 8a^2 \end{aligned}$$

최솟값 $-8a^2 = -8$, $a^2 = 1$

$\therefore a = -1 (\because a < 0)$

14. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),
$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

15. 차가 12인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x, $x+12$ 라 하면

$y = x(x+12)$

$\quad = x^2 + 12$

$x = (x+6)^2 - 36$

$x = -6$ 일 때, 최솟값 -36을 갖는다.

$x = -6$, $-6 + 12 = 6$

따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

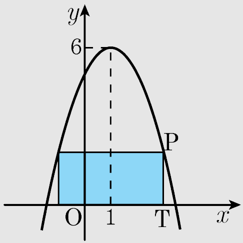
16. 이차함수 $y=-x^2+2x+5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y=-x^2+2x+5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2+2t+5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2+2t+5$ 이다.

$$\begin{aligned}\text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1)-t^2+2t+5] \\ &= 2(-t^2+4t+3) \\ &= -2t^2+8t+6 \\ &= -2(t-2)^2+14\end{aligned}$$

$t=2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

17. 지면으로부터 초속 30m 로 위로 던진 공의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -5t^2 + 30t$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 45 m

해설

$h = -5t^2 + 30t$ 에서 $h = -5(t-3)^2 + 45$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 45m 이다.

18. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근이 <u>아닌</u> 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3, -1, 1$ 또는 2

19. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

20. 방정식 $x^5 = 1$의 허근을 ω라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$일 때 $\alpha^2 + \alpha$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}^{2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}^{2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$\therefore\ \alpha^2 + \alpha - 1 = 0,\ \alpha^2 + \alpha = 1$

21. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$

$=1-2+4+3=6$

22. 방정식 $x^3=1$의 두 허근을 ω, $\overline{\omega}$라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega+\overline{\omega}=-1$
② $\omega\cdot\overline{\omega}=1$
③ $\omega^2+(\overline{\omega})^2=1$
④ $\omega^2=\overline{\omega}$, $(\overline{\omega})^2=\omega$
⑤ $\omega^2+\omega+1=0$

해설

$x^3=1$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$,
$x^2+x+1=0$ $\omega^3=1$,
$\omega^2+\omega+1=0$,
$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

① $x^2+x+1=0$두근은
$\omega,\overline{\omega}$이므로
$\omega+\overline{\omega}=-1(\bigcirc)$

② $x^2+x+1=0$두근은
$\omega,\overline{\omega}$이므로
$\omega\cdot\overline{\omega}=1(\bigcirc)$

③ $\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\cdot\overline{\omega}$
$=(-1)^2-2\cdot1=-1(\times)$

④ $\omega+\overline{\omega}=-1,$
$\overline{\omega}=-1-\omega$
$=-(1+\omega)=\omega^2$
$\omega+\overline{\omega}=-1,\omega=-1-\overline{\omega}=-(1+\overline{\omega})$
$=\overline{\omega}^2(\bigcirc)$

⑤$\omega^2+\omega+1=0$ $(\bigcirc)$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

24. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\quad\therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$

25. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4\left(m^2-1\right)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4\left(m^2-1\right)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.