1. 두 점 $A(-4,6)$, $B(1,1)$ 을 이은 선분 AB를 3 : 2 로 내분하는 점 P 와 1 : 2 로 외분하는 점 Q 의 중점의 좌표를 구하면?

① $(1,-2)$ ② $(-3,2)$ ③ $(-5,7)$

④ $(3,2)$ ⑤ $(0,4)$

해설

내분점, 외분점 구하는 공식을 이용하면,

$$P=\left(\frac{3\times1+2\times(-4)}{3+2},\frac{3\times1+2\times6}{3+2}\right)=(-1,3)$$

$$Q=\left(\frac{1\times1-2\times(-4)}{1-2},\frac{1\times1-2\times6}{1-2}\right)=(-9,11)$$

$\therefore$ P 와 Q 의 중점은

$$\left(\frac{-9+(-1)}{2},\frac{11+3}{2}\right)=(-5,7)$$

2. 네 점 O(0, 0), A(3, 1), B(4, 3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3$

3. 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x=y^2+1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,
$a=b^2+1\cdots\cdots$ ㉠
$l=\dfrac{|a-b+1|}{\sqrt{2}}\cdots$ ㉡
㉠를 ㉡에 대입하면
$$l=\frac{|b^2-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$
$\therefore\ b=\dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.
따라서 $a+b=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{4}$이므로
$\therefore\ 4(a+b)=7$

4. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

5. 점 $(2,\ 3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 점 $(2,\ 3)$ 을 x 축 방향으로 m 만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표와 같다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -10 ② -11 ③ -12 ④ -13 ⑤ -14

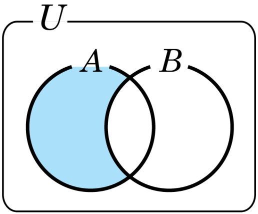
해설

점 $(2,\ 3)$ 을 원점 대칭 이동시킨 점은 $(-2\ ,-3)$

이 점은 x 축으로 -4 , y 축으로 -6만큼 평행이동 시킨 것과 같다

$\therefore \quad m+n=-4-6=-10$

6. 다음 벤 다이어그램의 빗금 친 부분을 표현한 것으로 옳지 않은 것은?

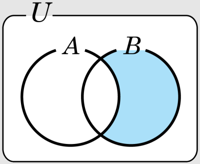


① $A \cap B^c$ ② $A - (A \cap B)$ ③ $A - B$

④ $(A \cup B) - A$ ⑤ $B^c - A^c$

해설

④



7. $y = \sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

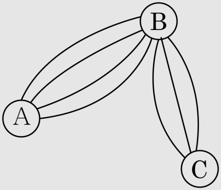
$y=2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha=3$, $\beta=5$
$\therefore\ \alpha+\beta=8$

8. (갑)과 (을)이 어느 산을 등산하는데 A에서 출발하여 산의 정상인 B까지 올라갔다가 C지점으로 내려가려고 한다. A에서 B까지 오르는 등산로는 4개가 있고 B에서 C로 내려가는 길은 3개가 있다고 한다. 이때, (갑)과 (을)이 A에서 C까지 가는데 서로 다른 길을 가는 방법의 수는?

① 24가지 ② 36가지 ③ 48가지
④ 72가지 ⑤ 144가지

해설

(갑)이 A → B → C 로 가는 방법 :
$4 \times 3 = 12$ (가지)
그 각각에 대하여 (을)이 A → B → C 로 가는 방법 :
$(4-1) \times (3-1) = 6$ (가지)
$\therefore 12 \times 6 = 72$ (가지)



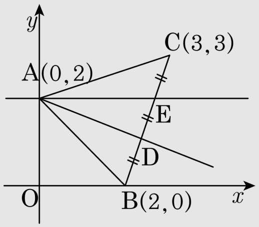
9. 점 A$(0,2)$, B$(2,0)$, C$(3,3)$ 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle$ABC 가 직선 $(k+1)x+(k-1)y=2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$k(x+y-2)+x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이
A$(0,2)$ 를 지나는 직선이므로
$\triangle$ABC 를 그림과 같이
2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 $1:2$ 또는 $2:1$ 로 내분하는
점D, E 를 지나게 된다.

D$\left(\frac{7}{3}, 1\right)$, E$\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$k\left(\frac{7}{3}+1-2\right)+\frac{7}{3}-1+2=0$

$k=-\frac{5}{2}$ 이므로 부적합 ($\because$ k 는 정수)

(ii) E 를 지날 때,

$k\left(\frac{8}{3}+2-2\right)+\frac{8}{3}-2+2=0$

$\therefore\ k=-1$

10. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

11. 직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 $f:(x,\ y)\to(x-2,\ y+1)$ 에 의하여 이동한 직선과 평행이동 $g:(x,\ y)\to(x+a,\ y-b)$ 에 의하여 이동한 직선이 일치할 때, $a,\ b$ 에 대한 관계식을 구하면?

① $a=-2b$　② $a=-b$　③ $a=b$

④ $a=2b$　⑤ $a=3b$

해설

평행이동 $f:(x,\ y)\to(x-2,\ y+1)$ 은
x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을
평행이동 f 에 의하여 이동하면
$(x+2)+2(y-1)-3=0$
$\therefore x+2y-3=0\cdots\cdots$ ㉠
또한, 평행이동 $g:(x,y)\to(x+a,y-b)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-b$ 만큼
평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 g 에 의하여 이동하면
$(x-a)+2(y+b)-3=0$
$\therefore x+2y-a+2b-3=0\cdots\cdots$ ㉡
이때, ㉠, ㉡이 일치해야 하므로
$-a+2b-3=-3$　$\therefore a=2b$

12. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로
각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선
$y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 와
직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$$

$\therefore\ b = 2a + 3$

따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+3)^2}$

$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$ 이므로

$a = -\frac{6}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

13. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ 일 때, $g^{-1}(1)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a(x + a) + b$

$\therefore\ a(x + a) + b = 2x + 1$

$\therefore\ a = 2,\ a^2 + b = 1,\ b = -3$

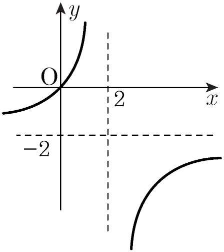
$g(x) = 2x - 3$

$g^{-1}(1) = k$ 이면 $g(k) = 1$

$\Rightarrow\ 2k - 3 = 1$

$\therefore\ k = 2$

14. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2$, $y=-2$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값은?



① -6 ② -4 ③ -3

④ 2 ⑤ 7

해설

점근선이 $x=2, y=-2$ 이므로 $y=-2+\dfrac{k}{x-2}$, $(k\neq 0)$

점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로

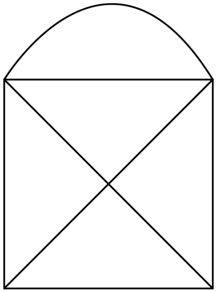
$0=-2+\dfrac{k}{-2}$, $\quad k=-4$

따라서 $y=-2+\dfrac{-4}{x-2}=\dfrac{-2x}{x-2}$

$\therefore\quad a=-2,\ b=0,\ c=-2$

$\therefore\quad a+b+c=-4$

15. 다음 그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하여라.

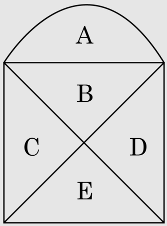


▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 36 가지

해설

경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 A , B 영역에 칠할 수 있는 색은 각각 3 가지, 2 가지이다.

i) C , D 영역에 같은 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×2 가지

ii) C , D 영역에 다른 색을 칠하고 E 영역을 칠하는 경우 : 2×1 가지

$\therefore 3\times2\times(2\times2+2\times1)=36$