

1. 실수 x 에 대하여 $|x-2|^2 - |3-x|^2 - \sqrt{-9} + \sqrt{-16}$ 을 $a+bi$ 꼴로 나타낼 때 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -5

② $2x-4$

③ $2x$

④ $2x-5$

⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x-2)^2 - (3-x)^2 - 3i + 4i \\ &= 2x-5+i\end{aligned}$$

$$\therefore a = 2x-5, b = 1$$

$$\therefore a+b = 2x-4$$

2. 실수 x, y 에 대하여 $(1+i)x + (i-1)y = 2i$ 일 때, $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(1+i)x + (i-1)y = 2i$$

$$(x-y) + (x+y)i = 2i$$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0$, $x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore x=1$, $y=1$

$$\therefore x+y=2$$

3. $x = 2009, y = 7440$ 일 때, $\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

주어진 식을 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi} \\ &= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)} \\ &= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{xy + y^2i - x^2i + xy} = 0 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 0

4. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

- ㉠ $f(z) \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

- ㉠ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
 $f(z) = z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
 $= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
 $\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z} \bar{w}$
 $= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

5. 방정식 $|x + 5| = 1$ 를 만족하는 x 의 값들의 합은?

- ① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$$|x + 5| = 1$$

$$\Rightarrow x + 5 = 1 \text{ 또는 } x + 5 = -1$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -6$$

6. 이차방정식 $x^2 - x + 4 = 0$ 의 근을 구하면?

- ① $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ② $x = 1 \pm \sqrt{15}$ ③ $x = -1 \pm \sqrt{15}i$
④ $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용한다.

$$x^2 - x + 4 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

7. 이차방정식 $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ 이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a = b + c$

② $2a = b + c$

③ $a = b - c$

④ $2a = b - c$

⑤ $2a = 2b - c$

해설

$$\begin{aligned} D &= (b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc - 4(ac - a^2 - bc + ab) \\ &= 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ac + 2bc - 4ab \\ &= (2a - b - c)^2 \end{aligned}$$

준식이 중근을 가져야 하므로

$D = 0$ 이어야 한다.

따라서, $(2a - b - c)^2 = 0$, $2a - b - c = 0$

$\therefore 2a = b + c$

8. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8

② -4

③ -2

④ 5

⑤ 2

해설

$$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$$

$$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$$

$$37 + 12k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{37}{12}$$

따라서 최대정수는 -4이다.

9. 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α 와 β 이므로
 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 2$ 이다.

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{2}$$

10. x 에 대한 이차방정식 $3x^2 - (2k + 5)x + 3 = 0$ 의 두 근 중 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha} = k^2$ 이 성립한다. 이때, 양수 k 의 값을 구하면?

- ① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 a 이면

다른 한 근은 $\frac{1}{a}$ 이다.

$$\therefore a + \frac{1}{a} = k^2 = \frac{2k+5}{3}$$

$$\therefore 3k^2 - 2k - 5 = 0$$

$$k = \frac{5}{3} \text{ 또는 } -1$$

$$\therefore \text{양수 } k = \frac{5}{3}$$

11. 직선 $y = ax + 1$ 이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$ ② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$ ④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a + 3)x + 4 = 0$

(판별식) $= (a + 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0$

$a < -7$ 또는 $a > 1 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a - 3)x + 4 = 0$

(판별식) $= (a - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 < 0$

$\therefore -1 < a < 7 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 동시에 만족하는 상수 a 의 값의 범위는 $1 < a < 7$

12. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$

13. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ 에서
 $x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

14. $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -3$ 에서 최댓값 5 를 갖는 포물선의 식은 $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5$ 이다. $y = -\frac{1}{3}(x+3)^2+5 = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$ 따라서 y 의 절편은 2 이다.

15. x 의 범위가 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

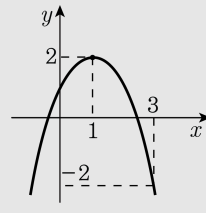
▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x - 1)^2 + 2$$

이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.

$$\therefore M + m = 2 + (-2) = 0$$



16. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$$y = x^2 + 2ax + a = (x + a)^2 - a^2 + a$$

최솟값은 $-a^2 + a$ 이다.

$$\text{즉, } m = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 일 때, m 은 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

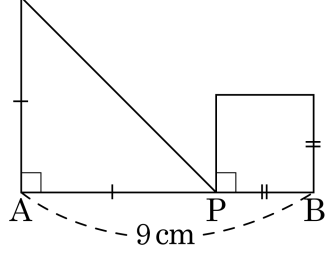
17. $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $2x - y$ 는 $x = \alpha, y = \beta$ 에서 최댓값 m 을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$2x - y = k$ 로 놓으면
 $y = 2x - k \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면
 $x^2 + (2x - k)^2 = 5$
 $\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 x 에 대한 이차방정식으로 보면
 x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5) \geq 0, k^2 \leq 25$
 $\therefore -5 \leq k \leq 5$
따라서 k 의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y 의 값은
 $\textcircled{2}$ 에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0, 5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
 $\textcircled{1}$ 에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$ 이므로
 $m + \alpha + \beta = 6$

18. 길이가 9cm인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP의 길이는?



- ① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
 ④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{AP} = 6(\text{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

19. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$x^3 - 1 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

20. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

21. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 k 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^3 + 3x^2 - kx - 5 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면
 $(-1)^3 + 3(-1)^2 - k(-1) - 5 = 0$
 $\therefore k = 3$

22. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p, y=q$ 또는 $x=r, y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy-y^2=6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=2y+1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ②에 대입하여 정리하면

$$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$$

$$\therefore y=2, -3$$

$y=2, y=-3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x=5, x=-5$$

$$\therefore x=5, y=2 \text{ 또는 } x=-5, y=-3$$

23. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x , y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots \textcircled{A}$
 $4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{B}$ 식 $+2 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$
 $\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$
 $\textcircled{A}$: $3x = y$ 를 $\textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7x^2 = 7 \quad x = 1(x > 0), \quad y = 3$
 $\therefore x + y = 4$
 $\textcircled{A}$: $2x = 3y$ 를 $4 \times \textcircled{A}$ 식에 대입하면
 $7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, y = 2(y > 0), x = 3$
 $\therefore x + y = 5$
 $a > b$ 이므로 $a = 5, b = 4$
 $\therefore a - b = 1$

24. x, y 에 대한 연립방정식
$$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\frac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\frac{3}{4}$
 ④ $a \leq \frac{2}{3}$

② $a > -\frac{1}{2}$
 ⑤ $a < 2$

③ $-1 < a < 1$

해설

$$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\frac{a^2+1}{4} \end{cases}$$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2 -$

$$(a+2)t + \frac{a^2+1}{4} = 0$$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$$D = (a+2)^2 - 4 \times \frac{a^2+1}{4} \geq 0$$

$$4a+3 \geq 0$$

$$\therefore a \geq -\frac{3}{4}$$

25. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$