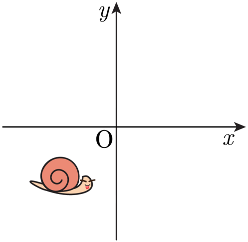
1. 직교좌표계를 사용했을 때, 달팽이의 현재 위치는 $(-10, -10)$ 이다. 이 달팽이는 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다고 한다. 이 달팽이가 원점에 도달하는데 걸린 시간은 몇 분인지 구하여라.



▶ 답 : 　　　　　　　　　　　　분

▷ 정답 : 5분

해설

달팽이가 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 2 만큼 평행이동하는데 1 분이 걸린다.
즉, $(-10, -10)$ 에서 $(-8, -8)$ 까지 가는데 1 분, $(-6, -6)$ 까지 가는데 2 분, 같은 식으로 하면 원점에 도달하는데 총 5 분이 걸린다.

2. 점$P_1(1,\ 2)$를 점$P_2(-1,\ 4)$로 옮기는 평행이동에 의하여 점$(2, -2)$는 어떤 점으로 옮겨지는가?

① $(0,\ 0)$ ② $(1,\ 1)$ ③ $(4,\ 0)$

④ $(4, -4)$ ⑤ $(1,\ 2)$

해설

주어진 평행이동은 x축 방향으로 -2, y축 방향으로 $+2$만큼 평행이동하므로 $(2-2, -2+2)=(0,\ 0)$으로 이동한다.

3. 좌표축을 평행이동하여 원점을 점 $(a,\ b)$ 로 이동하였더니 방정식 $x^2+y^2=16$ 이 새로운 좌표축에서 $x^2+y^2+4x-2y+c=0$ 인 방정식으로 되었다. 이 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값은?

① -10 ② -12 ③ -14 ④ -16 ⑤ -18

해설

원점을 점 $(a,\ b)$ 로 평행이동시키는 좌표축의 변환은, 좌표평면 위의 모든 점을 x축으로 $-a$만큼, y축으로 $-b$만큼 평행이동시키는 변환과 같다.
또, 원을 평행이동하면 반지름의 길이는 변하지 않고 중심좌표만 평행이동된다.
$\therefore x^2+y^2=16 \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=16$ 으로 이동
$\therefore x^2+y^2+4x-2y+c=0 \rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=5-c$ 이므로
$a=-2,\ b=+1,\ c=5-c=16 \rightarrow c=-11$
$\therefore\ a+b+c=-12$

4. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l, l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m, m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼
평행이동시킨 직선 l 은
$l \ : \ y = 2(x - \alpha) + 4$
이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은
$m \ : \ (-y) = 2(x - \alpha) + 4$
n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로
$n \ : \ (-y) = 2(-x - \alpha) + 4$
이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로
l 과 n이 일치하려면
$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4$ 가 되어 $\alpha = 2$ 이다.

5. 직선 l 을 x 축의 양의 방향으로 2 만큼, y 축의양의 방향으로 -1 만큼 평행이동 시켰더니 $x-2y-1=0$ 와 겹쳤다. 직선 l 의 방정식은?

① $x+y-1=0$　② $x-2y+3=0$　③ $2x+y-1=0$

④ $x-y+5=0$　⑤ $x-2y+7=0$

해설

거꾸로 $x-2y-1=0$ 을 x 축으로 -2 , y 축으로 $+1$ 이동시키면, 직선 l 과 겹치게 된다.

$\Rightarrow\ (x+2)-2(y-1)-1=0$

$\Rightarrow\ x-2y+3=0\ \cdots\ l$

6. 직선 $2x-y+3=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 다음 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x+2y+3=0$ ② $x+4y+6=0$

③ $2x+y+2=0$ ④ $2x+4y+6=0$

⑤ $3x+2y+1=0$

해설

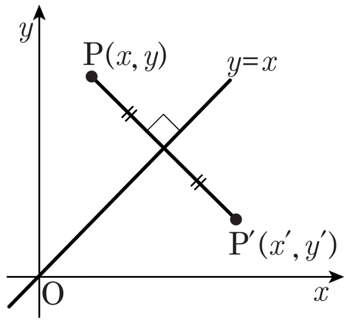
직선 $2x-y+3=0$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{\text{직선 } x=y\text{에 대하여}}$ 직선 $2y-x+3=0$

$\xrightarrow[\text{대칭이동}]{y\text{축에 대하여}}$ 직선 $2y-(-x)+3=0$,

즉 $x+2y+3=0$

7. 다음은 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표를 구하는 과정이다. 이 때, (가) ~ (라) 에 알맞지 않은 것은?



점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$ 이라고 하면
선분 PP' 의 중점
$\mathrm{M}\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ 은
직선 (가) 위에 있으므로
$\dfrac{y+y'}{2}$ =(나)$\cdots\cdots$㉠
또한, 직선 PP' 은 직선 $y = x$ 와 수직이므로
$1\times$(다) $= -1$ ← (수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1)
이것을 정리하면
$x' + y'$ =(라) $\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x' = y, y' = x$
따라서, 구하는 점 P' 의 좌표는 (마) 이다.

① (가) : $y = x$ ② (나) : $\dfrac{x+x'}{2}$ ③ (다) : $\dfrac{y'-y}{x'-x}$
④ (라) : $x + y$ ⑤ (마) : $(x,\ y)$

해설

구하는 점 P' 의 좌표는 $(y,\ x)$ 이다.

8. 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다. 점 $\left(\frac{a}{b},\ a+b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?

① 제 1 사분면
② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면
④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a,\ -b)$ 이고,
이 점을 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b,\ a)$ 이다.
즉, 점 $(-b,\ a)$가 제4 사분면의 점이므로
$-b > 0,\ a < 0 \quad \therefore\ a < 0,\ b < 0$
따라서 $\frac{a}{b} > 0,\ a+b < 0$ 이므로 점 $\left(\frac{a}{b},\ a+b\right)$ 는 제4사분면에 존재한다.

9. 점 $(-1,2)$ 를 원점에 대해 대칭 이동시킨 후, 다시 x 축 방향으로 a 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 x 축에 대하여 대칭 이동시킨 후, $y=x$ 에 대해 대칭이동 시켰더니 $(b,1)$ 이 되었다. 이 때, 상수 $a+b$ 의 값을 구하면?

① -1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$(-1,\ 2)$ 을 원점대칭이동 $\rightarrow (1,\ -2)$
x축 방향으로 a 만큼 평행이동 $\rightarrow (1+a,\ -2)$
x 축에 대해 대칭이동 $\rightarrow (1+a,\ 2)$
$y=x$ 에 대해 대칭이동 $\rightarrow (2,\ 1+a)$
따라서 $b=2,\ 1+a=1,\ a=0$ 이므로 $a+b=2$

10. 점 $(-1,\ 2)$ 를 원점에 대하여, 대칭 이동시킨 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행 이동시켰다. 그 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭 이동시켰더니 $(3,\ 2)$ 가 되었다. 이 때, ab 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$(-1,\ 2) \xrightarrow{\text{원점대칭}} (1,\ -2) \xrightarrow{x\text{축으로 } a\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2) \xrightarrow{y\text{축으로 } b\text{만큼 평행이동}} (1+a,\ -2+b)$

$\xrightarrow{y=x\text{대칭}} (-2+b,\ 1+a) = (3,\ 2)$

$\therefore\ a=1,\ b=5$

11. 좌표평면 위의 점 P 를 y 축에 대하여 대칭이동 하고 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니 원래의 점 P 가 되었다. 점 P 의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$　③ $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right)$　⑤ $\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

해설

$P=(x,y)$ 라 하면,

$(x,y) \xrightarrow{y\text{축 대칭}}$

$(-x,y) \xrightarrow{x\text{축으로 2, }y\text{축으로 3만큼 평행이동}}$

$(-x+2,\ y+3) \xrightarrow{y=x\text{에 대칭}} (y+3, -x+2)$

$\Rightarrow \quad (y+3, -x+2)=(x,y)$

$\Rightarrow \quad x=y+3, \quad y=-x+2$

두 식을 연립하면, $x=\frac{5}{2}, \quad y=-\frac{1}{2}$

$\therefore \quad \mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

12. 원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면 직선 $y=mx$ 에 접한다고 한다. 이때, 이를 만족하는 모든 상수 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{6}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

해설

원 $x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동하면 $(-x)^2+y^2-6(-x)+4y+9=0$,

$x^2+y^2+6x+4y+9=0$

$\therefore (x+3)^2+(y+2)^2=4$

이 원이 직선 $y=mx$ 에 접하므로 원의 중심 $(-3,-2)$ 에서 직선 $mx-y=0$ 에 이르는 거리는 반지름 2 와 같다.

즉, $\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

이것을 정리하여 풀면 $m=0$ 또는 $m=\frac{12}{5}$

따라서 모든 상수 m 의 값의 합은 $\frac{12}{5}$

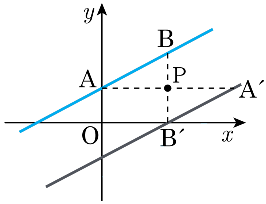
13. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1,a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2 \quad \therefore a=1$

14. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 P 에 대한 두 점 A,B 의 대칭점은 각각 A',B' 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A' 의 좌표가 $(3,1)$, 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a,b 의 곱은?



① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $-\frac{1}{4}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

두 점 A',B' 은 각각 점 P 에 대한 두 점 A,B 의 대칭점이므로 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다.

즉, $\triangle\mathrm{APB}\equiv\triangle\mathrm{A}'\mathrm{PB}'$ 에서

$\angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{P}$ (엇각)이므로

$\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}\,//\,\overleftrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$

따라서, 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또, 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 은 점 $\mathrm{A}'(3,1)$ 을 지나므로 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서, $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$ 이므로

$ab=-\frac{1}{4}$

15. 점$(-1,\ 4)$ 를 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동한 점이 $(5,\ 2)$ 일 때, ab 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 가 두 점 $(-1,\ 4)$, $(5,\ 2)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$(a,\ b) = \left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) = (2,\ 3)$$

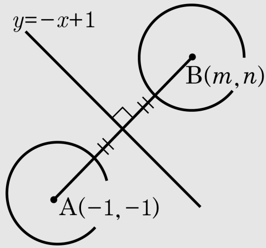
$\therefore\ a = 2,\ b = 3 \therefore\ ab = 6$

16. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.



이때, 옮기기 전의 원의 중심을 $A(-1,-1)$, 옮긴 후의 원의 중심을 $B(m,n)$ 이라고 하면

선분 AB 는 직선 $y=-x+1$ 과 수직이므로

$\dfrac{n+1}{m+1}\cdot(-1)=-1$ 에서

$m=n \cdots\cdots$ ㉠

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\dfrac{m-1}{2},\dfrac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$\dfrac{n-1}{2}=-\dfrac{m-1}{2}+1$ 에서

$m+n=4 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=2, n=2$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2,2)$ 이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

즉, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$\therefore a=-4, b=-4, c=7$

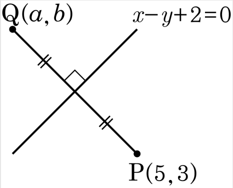
$\therefore a+b+c=-1$

17. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=7$

해설



$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라면

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+5}{2}-\frac{b+3}{2}+2=0$$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$ ㉠

($\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)×1 = −1 이므로

($\because$ $\overline{\mathrm{PQ}}$ 와 직선이 수직)

$$\frac{b-3}{a-5}\times 1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots ㉡$$

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

18. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=8$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$이 되었다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 $(a,\ b)$라 하면,
$x^2+y^2=8$의 중심 $(0,\ 0)$과 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$의 중심인 $(4,\ 2)$의 중점은 $y=ax+b$ 위를 지나고,
두 점을 이은 직선과 $y=ax+b$는 수직이다.
따라서 중점인 $(2\ ,\ 1\ )$를 $y=ax+b$에 대입하면 $1=2a+b$.
수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로
$y=ax+b$의 기울기가 a이므로
두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$,
따라서 $a=-2$, $b=5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20-c=8$.
$c=12$

19. 직선 $y=x+1$에 관해서 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 대칭인 점의 좌표를 (x,y)라 할 때, $x+y$ 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y=x+1$에 $\mathrm{A}(-2,3)$에 대칭인 점은 A'이므로 $\overline{\mathrm{AA}'}$의 중점은 $y=x+1$ 위의 점이다.

$$\frac{-2+a}{2}+1=\frac{3+b}{2} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

또 $\overline{\mathrm{AA}'}$의 기울기와 $y=x+1$의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\left(\frac{b-3}{a+2}\right)\times 1=-1$$

$\therefore\ b-3=-a-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a=2,\quad b=-1$

$\therefore\ (2,-1)$

20. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

> 갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
>
> 을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
>
> 병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y=f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y=-f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
>
> 정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병　② 갑, 을, 정　③ 갑, 병, 정

④ 을, 병, 정　⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참

병 : $(x,y) \quad \rightarrow \quad (-x,-y)$: 원점 대칭

$\therefore \quad y=f(x) \quad \rightarrow \quad -y=f(-x)$: 거짓

21. 다음 중 원 $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$

② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{5}$

④ $(x+1)^2+y^2=3$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=16$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+6x-6y+2=0$ 에서 $(x+3)^2+(y-3)^2=16$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 4 인 ⑤이다.

22. 좌표평면 위의 점 P$(x,\ y)$ 가 다음과 같은 규칙에 따라 이동하거나 이동하지 않는다. P가 점 A$(6,\ 5)$ 에서 출발하여 이떤 점 B 에서 더 이상 이동하지 않게 되었다. A 에서 B 에 이르기까지 이동한 횟수는?

㉠ $y = 2x$ 이면 이동하지 않는다. ㉡ $y < 2x$ 이면 x 축 방향으로 -1 만큼 이동한다. ㉢ $y > 2x$ 이면 y 축 방향으로 -1 만큼 이동한다.

① 4회 ② 5회 ③ 6회 ④ 7회 ⑤ 8회

해설

$(6,\ 5) \to (5,\ 5) \to (4,\ 5) \to (3,\ 5) \to (2,\ 5) \to (2,\ 4)$

$\therefore$ 5 회 이동한다.

23. 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(a,\ b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+2y-1=0$ 은 직선 $x+2y-4=0$ 으로 이동하였다. 이때, $a+2b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

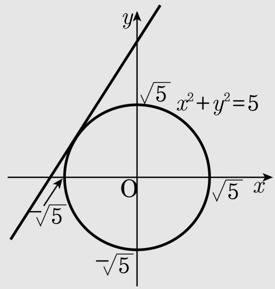
x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동했다고 하면,
$(x-m)+2(y-n)-1=0,\ x+2y-m-2n-1=0$을
$x+2y-4=0$ 과 비교해 보면,
$-m-2n=-3\ \cdots$ ㉠
점 $(1,\ 2)$ 를 x 축으로 m , y 축으로 n 만큼 평행이동 시키면,
$(1+m,\ 2+n)$
$\Rightarrow\ \ 1+m=a,\ \ 2+n=b$
$\Rightarrow\ \ a+2b=m+1+4+2n=8$
$(\because$ ㉠에서 $m+2n=3\ )$

24. 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선 l_1 과 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선 l_2 가 모두 원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y=2x+8$ 을 평행이동하면
원 $x^2+y^2=5$ 와 접하므로 접선의
기울기는 2 이다.
원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접
하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은
$y=2x+\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+2^2}$
즉, $y=2x+5$ 이고,
이것이 두 직선 l_1, l_2 와 일치한다.



이때, 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로
m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y=2(x-m)+8 \quad \therefore l_1: y=2x-2m+8$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$-2m+8=5 \quad \therefore m=\frac{3}{2}$
또한, 직선 $y=2x+8$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼
평행이동한 직선의 방정식은
$y-n=2x+8 \quad \therefore l_2: y=2x+8+n$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$8+n=5 \quad \therefore n=-3$
$\therefore m+n=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

25. 직선 $y = 2x + a$ 를 x 축으로 2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동하면 $x^2 + y^2 = 5$와 접한다고 한다. 이 때, 양수 a의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x : y) \quad \rightarrow \quad (x + 2,\ y + 1)$

$y = 2x + a \ \xrightarrow{f} (y - 1) = 2 \cdot (x - 2) + a$

$y = 2x - 4 + a + 1 = 2x + a - 3$

직선 $2x - y + (a - 3) = 0$ 과 $(0,\ 0)$ 과의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\dfrac{|a-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5},\ |a - 3| = 5$

$a - 3 = \pm 5,\ a = 3 \pm 5$

$\therefore\ a = 8 \ (\because\ a > 0)$

26. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동 $f : (x, y) \to (x-4, y+1)$ 에 의하여 옮긴 후 다시 직선 $y = -3$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 이라 할 때, $a+b+r$ 의 값은?

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -5 ⑤ -10

해설

원의 중심을 이동시키면 된다

$(0,\ 0) \xrightarrow{f} (-4,\ 1) \xrightarrow{y=-3\text{대칭}} (-4,\ -7)$

$\therefore$ 이동된 원의 방정식 $: (x+4)^2 + (y+7)^2 = 1$

$\Rightarrow a+b+r = -10$

27. 점 $P(a,\ b)$ 의 직선 $y=2x$ 에 대한 대칭점을 Q, 점 Q 를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점을 R 이라 하면 두 점 R 과 P 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, $3a+b$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ 5

해설

$Q=(X,\ Y)$ 라 할 때, $\overline{PQ}$ 는 $y=2x$ 에 수직하고,
P, Q 의 중점은 $y=2x$ 위에 존재한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{Y-b}{X-a}\times 2=-1,\quad \frac{Y+b}{2}=2\times\frac{X+a}{2}$$

두 식을 연립하면, $X=\dfrac{4b-3a}{5},\quad Y=\dfrac{4a+3b}{5}$

이제 Q 를 x 축으로 1 평행이동 시키면,

$$R=\left(\frac{4b-3a+5}{5},\ \frac{4a+3b}{5}\right)$$

R 과 P 가 $y=x$ 대칭이므로,

$$\frac{4b-3a+5}{5}=b,\quad \frac{4a+3b}{5}=a$$

정리하면 $3a+b=5,\ a=3b$

두 식을 연립하면, $a=\dfrac{3}{2},\quad b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad 3a+b=5$

28. 원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 원을 O′ 이라고 하자. 두 원 O, O′ 의 교점을 각각 A, B 라 할 때, 점 (6, 2) 를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, ab의 값을 구하면?

① -8 ② -12 ③ 8 ④ 12 ⑤ 0

해설

원 O : $x^2+(y-1)^2=1$을 x축의 방향으로 -1만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
O′ : $(x+1)^2+y^2=1$
두 원의 방정식을 일반형으로 변형하면
O : $x^2+y^2-2y=0$, O′ : $x^2+y^2+2x=0$
이 때, 직선 AB의 방정식은 $2x+2y=0$,
즉 $y=-x$
따라서 점 (6, 2)를 직선 $y=-x$에 대하여
대칭이동한 점은 $(-2,\ -6)$이므로
$a=-2,\ b=-6\quad \therefore ab=12$

29. 직선 $y=kx+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 의 넓이를 이등분한다고 할 때 k 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

먼저 $y=kx+1$ 를 x 축 대칭시킨 직선은

$y=-kx-1\cdots$ ㉠

이제 원의 방정식을 정리하면,

$(x+3)+(y-2)^2=4$

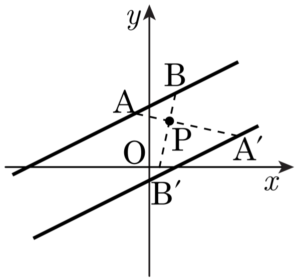
직선이 원의 넓이를

이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

중심이 $(-3,2)$ 이므로 ㉠ 에 대입하면,

$2=3k-1 \Rightarrow \quad k=1$

30. 좌표평면 위의 정점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점은 각각 A′, B′ 이고, 직선 AB 의 방정식은 $x-2y+4=0$ 이라 한다. 점 A′ 의 좌표가 $(3,1)$, 직선 A′B′ 의 방정식이 $y=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?



① $-\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

해설

두 점 A′, B′ 은 점 P 에 대한 두 점 A, B 의 대칭점이므로, 직선 A′B′ 은 직선 AB 의 점대칭도형이다

$\triangle APB \equiv \triangle A'PB'$ 에서

$\angle ABP = \angle A'B'P$ (엇각) 이므로

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{A'B'}$ 이다.

따라서 직선 A′B′ 의 기울기는 직선 AB 의 기울기인 $\frac{1}{2}$ 과 같다.

또한, 직선 A′B′ 은 A′$(3,1)$ 을 지나므로

직선 A′B′ 의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-3)$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore\ ab=-\frac{1}{4}$

31. 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2-c=0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -18 ② -16 ③ 0 ④ 22 ⑤ 23

해설

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

즉, $(2,4)$ 를 $y=ax+b$ 에 대칭이동하면 $(0,0)$

1) $(2,4)$ 와 $(0,0)$ 의 중점은 $y=ax+b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2=a+b$

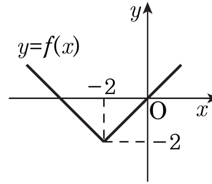
2) $(2,4),(0,0)$ 을 잇는 선분은 $y=ax+b$ 에 수직이다.

$\Rightarrow 2=-\frac{1}{a}, a=-\frac{1}{2}$

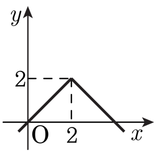
1), 2) 에 의해 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=20,$

$a+b+c=22$

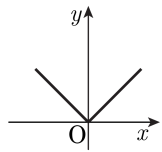
32. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



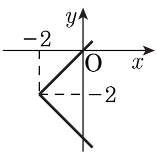
①



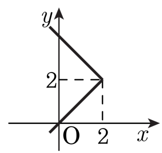
②



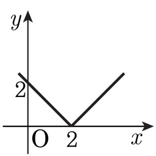
③



④



⑤



해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를
y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2 만큼 평행 이동 한 것이다.

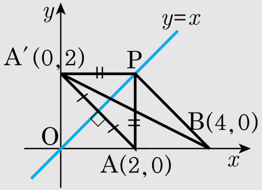
33. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ 4　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서



$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

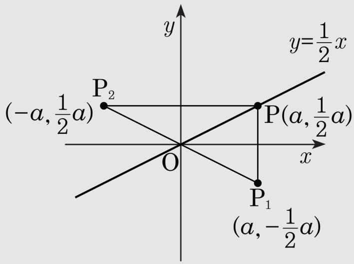
$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

34. 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점 P(a, b) 를 x 축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점을 P_1, P_2 라 하자. $\triangle PP_1P_2$ 의 넓이가 4 일 때, 두 양수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설



점 $P(a,\ b)$가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이므로 $P\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$, x축 대칭 : $P_1\left(a,\ -\frac{1}{2}a\right)$, y축 대칭 : $P_2\left(-a,\ \frac{1}{2}a\right)$

$\triangle PP_1P_2$ 는 $\angle P_1PP_2=90°$ 인 직각삼각형으로 넓이는 $\overline{PP_1}\times\overline{PP_2}\times\frac{1}{2}$ 이다.

$\overline{PP_1}=a$, $\overline{PP_2}=2a$

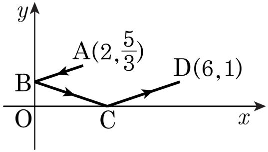
$\therefore a\times 2a\times\frac{1}{2}=4$

$a=\pm 2$

$a>0$ 이므로 $a=2,\ b=\frac{1}{2}a=1$

$\therefore a+b=3$

35. 좌표평면의 x 축, y 축 $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ 위에 두 평면 거울이 놓여있다. 빛이 점 $A(2,\ \frac{5}{3})$ 에서 출발하여 다음 그림과 같이 $A \to B \to C \to D$ 의 경로로 반사되어 점 $D(6,\ 1)$ 에 도달한다고 할 때, 점 C 의 x 좌표를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

해설

A″ 와 D를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1 + \frac{5}{3}}{6 + 2}(x-6)+1 = \frac{1}{3}x-1$$

점 C 의 x좌표는 이 그래프의 x절편이므로 3

$\therefore\ x = 3$